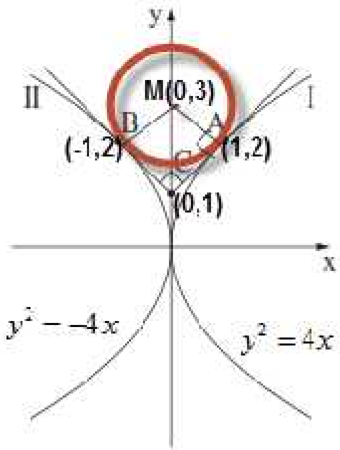
א. נתונה פרבולה I שמשוואתה $y^2 = 4x$, שבה $p = 2$.

נתונה פרבולה II שמשוואתה $y^2 = -4x$, שגם בה $p = 2$.

המשיקים לפרבולות בנקודות A ו- B , נפגשים על ציר ה- y .



משוואת המשיק לפרבולה, בנקודת ההשקה, היא $yy_0 = p(x + x_0)$.

אם נציב $y = 0$, נקבל $x = -x_0$,

ולכן נקודת החיתוך עם ציר ה- y שבה $x_C = 0$, היא נקודת האמצע,

(בין נקודת ההשקה לנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x),

ומכאן ש- $y_C = \frac{y_A + 0}{2} = \frac{y_A}{2}$.

עבור הפרבולה $y^2 = -4x$ (מהפרבולות $y^2 = -2px$)

משוואת המשיק היא $yy_0 = -p(x + x_0)$, ואופן ההוכחה זהה ונקבל ש- $y_C = \frac{y_B}{2}$.

מאחר ששני המשיקים נחתכים בנקודה C , הרי ש- $\frac{y_B}{2} = \frac{y_A}{2} \rightarrow y_B = y_A$.

(מכאן גם, עקב הסימטריה של שתי הפרבולות לציר ה- y , ש- $x_B = -x_A$).

נתון ששני המשיקים מאונכים זה לזה בנקודה $C(0, \frac{y_A}{2})$.

$$\left.\begin{aligned} m_{AC} &= \frac{p}{y_A} = \frac{2}{y_A} \\ m_{BC} &= \frac{-p}{y_B} = \frac{-2}{y_A} \end{aligned}\right\} \frac{2}{y_A} \cdot \frac{-2}{y_A} = -1 \quad \rightarrow y_A = 2 \leftarrow y_A > 0$$

נציב במשוואות הפרבולות ונקבל ששיעורי נקודות ההשקה: $A(1,2)$, $B(-1,2)$.

תשובה: $A(1,2)$, $B(-1,2)$.

ב. (1) נתון ש- $ACBM$ **ריבוע, כאשר על פי הסעיף הקודם** $C(0,1)$ **.**

האלכסונים חוצים זה את זה בריבוע, ולכן מפגש האלכסונים הוא בנקודה $(0,2)$ **(אמצע** AB**),**

ועל פי נוסחת אמצע קטע לאלכסון MC**, נקבל ש-** $M(0,3)$**.**

תשובה: $M(0,3)$ **.**

(2) נתון כי מעגל שמרכזו $M(0,3)$ **משיק לישרים** AC **ו-** BC**.**

MA **מאונך למשיק (כי זוויות הריבוע ישרות), ולכן** MA **הוא המרחק הקטן ביותר ממרכז המעגל למשיק, ומכאן שהוא הרדיוס.**

אורך הרדיוס: $R=\sqrt{(0-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

ומשוואת המעגל היא $x^2+(y-3)^2=2$**.**

תשובה: משוואת המעגל היא $x^2+(y-3)^2=2$**.**

א. נתונה פירמידה $OBCD$ **ששלושה ממקצועותיה, המאונכים זה לזה, מונחים על הצירים.**

על פי הנתונים: $O(0,0,0)$ **,** $B(3,0,0)$ **,** $C(0,4,0)$ **,** $D(0,0,6)$**.**

$OK:KB=2:1$**, ובהתאם** $K(2,0,0)$**.**

$OP:PD=1:1$**, ובהתאם** $P(0,0,3)$**.**

דרך הנקודות K **ו-** P **עובר מישור המקביל למקצוע** CD**.**

נמצא את ההצגה הפרמטרית של המישור ואת משוואת המישור, החותך את ציר ה- y **בנקודה** Q**.**

נמצא את ההצגה הפרמטרית של המישור KPQ **ולאחר מכן את משוואת המישור.**

$$\overrightarrow{KP}=\underline{P}-\underline{K}=\underline{x}=(-2,0,3)$$
$$\overrightarrow{CD}=\underline{D}-\underline{C}=\underline{x}=(0,-4,6)$$

ההצגה הפרמטרית של המישור היא: $\underline{x}=(2,0,0)+t(0,2,-3)+s(-2,0,3)$**.**

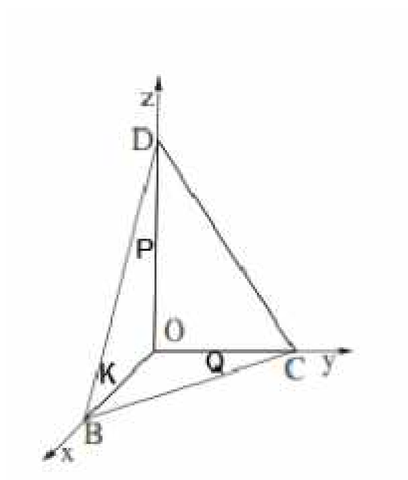
$$\left.\begin{array}{l}(a,b,c)\cdot(0,-2,3)=0 \quad \rightarrow -2b+3c=0\\(a,b,c)\cdot(-2,0,3)=0 \quad \rightarrow -2a+3c=0\end{array}\right\} c=2, b=a=3$$

משוואת המישור KPQ **היא:** $3x+3y+2z+d=0$**. נציב** $K(2,0,0)$ **ונקבל ש-** $d=-6$ **.**

משוואת המישור KPQ **היא:** $3x+3y+2z-6=0$**.**

$x_Q=z_Q=0$ **, ומכאן ש-** $3y_Q-6=0$**, ולכן** $y_Q=2$ **ו-** $Q(0,2,0)$ **באמצע הקטע** OC**.**

תשובה: $OQ:QC=1:1$ **.**



<u>**דרך חלופית ואלגנטית**</u>

המישור KPQ **מקביל למקצוע** CD**.**

כיוון שכך הישר PQ **מקביל למקצוע או מצטלב איתו.**

כיוון שהנקודות P,Q **נמצאות גם במישור** ODC**,**

הרי שבהכרח אין הצטלבות והישרים מקבילים.

מכאן ש- PQ **קטע אמצעים ב-** ΔODC **,**

ולכן הנקודה Q **נמצאת באמצע הקטע** OC**,**

ובהתאם לכך: $OQ:QC=1:1$**.**

ב. נחשב את היחס המבוקש, בין נפחי שתי הפירמידות.

$$V_{OKPQ}=\frac{S_{\Delta KPQ}\cdot OP}{3}=\frac{\frac{3\cdot 2}{2}\cdot 3}{3}=3$$

$$V_{OBCD}=\frac{S_{\Delta OBC}\cdot OD}{3}=\frac{\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 6}{3}=18.$$

$$\frac{V_{OKPQ}}{V_{OBCD}}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

תשובה: $\frac{V_{OKPQ}}{V_{OBCD}}=\frac{1}{6}$.

ג. נמצא את הזווית בין הישר CB **למישור** KPQ.

$\overrightarrow{CB}=\underline{B}-\underline{C}=\underline{x}=(3,-4,0)$.

$$\sin\measuredangle(\overrightarrow{CB},®_{KPQ})=\frac{|(3,-4,0)\cdot(3,3,2)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+2^2}}=\frac{|3\cdot 3-4\cdot 3+0\cdot 2|}{5\cdot\sqrt{22}}=\frac{3}{5\cdot\sqrt{22}}\quad\rightarrow\measuredangle(\overrightarrow{CB},®_{KPQ})=7.349°.$$

תשובה: הזווית בין הישר CB **למישור** KPQ **היא בת** 7.349° .

א. נתון המקום הגיאומטרי $z\bar{z}+i(z-\bar{z})+z+\bar{z}=0$ I **, כאשר** $z=x+yi$ **מספר מרוכב.**

נזהה את המקום הגיאומטרי.

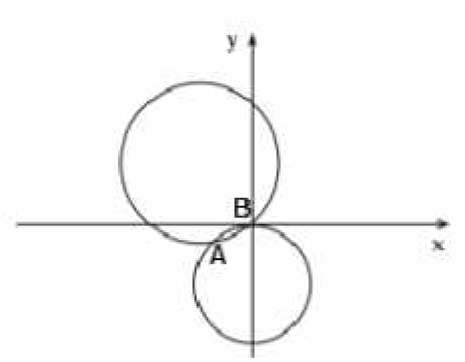
$$(x+yi)(x-yi)+i\left[x+yi-(x-yi)\right])+x+yi+x-yi=0$$
$$x^2+y^2+i(+2yi)+2x=0$$
$$x^2+y^2-2y+2x=0$$
$$\boxed{(x+1)^2+(y-1)^2=2}$$

וזה מעגל שמרכזו $(-1,1)$ **, ורדיוסו** $\sqrt{2}$ **.**

נתון מקום גיאומטרי נוסף $|z|^2+i(\bar{z}-z)=0$ II **.**

נזהה את המקום הגיאומטרי.

$$(\sqrt{x^2+y^2})^2+i\left[(x-yi-(x+yi)\right]=0$$
$$x^2+y^2+i(-2yi)=0$$
$$x^2+y^2+2y=0$$
$$\boxed{x^2+(y+1)^2=1}$$



וזה מעגל שמרכזו $(0,1)$ **, ורדיוסו** 1 **.**

תשובה: הסרטוט משמאל.

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך בין שני המעגלים.

$$-\begin{cases}x^2+y^2-2y+2x=0\\x^2+y^2+2y=0\end{cases}$$
$$-4y+2x=0$$
$$\boxed{x=2y}$$
$$(2y)^2+y^2+2y=0$$
$$5y^2+2y=0$$
$$y(5y+2)=0$$
$$\left.\begin{array}{l}y=0 \quad \rightarrow x=0\\ y=-0.4 \quad \rightarrow x=-0.8\end{array}\right\}\boxed{B(0,0),A(-0.8,-0.4)}\leftarrow x_A<x_B$$

תשובה: $B(0,0),A(-0.8,-0.4)$ **.**

ג. נתונה הנקודה $P(x_0, y_0)$ הנמצאת במרחק שווה מכל הנקודות שעל המעגל שמרכזו $(-1, 1)$, ורדיוסו $\sqrt{2}$.

מכאן ש- $P(x_0, y_0)$ היא מרכז המעגל ושיעוריה $(-1, 1)$.

בהתאם:

$$z_0 = -1+i$$
$$\overline{z} = -1-i$$

נציב את $\overline{z} = -1-i$ במשוואת המקום הגיאומטרי השני: $x^2 + (y+1)^2 = 1$.

$$(-1)^2 + (-1+1)^2 = 1$$
$$1 = 1 \quad o.k.$$

תשובה: הוכַח.

ד. נתון $z_1 = -0.8 - 0.4i$.

$$a_1 = 5z_1 = -4-2i$$
$$d = z_0 = -1+i$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$$
$$S_n = \frac{n}{2}\left[2(-4-2i) + (-1+i)(n-1)\right]$$
$$S_n = \frac{n}{2}\left(-8-4i-n+1+in-i\right)$$

על-מנת שסכום זה יהיה מספר ממשי, נדרש שהחלק המדומה יהיה שווה ל- 0.

$$0 = \frac{n}{2}\left(-4+n-1\right) \quad : \frac{n}{2} \neq 0$$
$$-5+n=0$$
$$\boxed{n=5}$$

תשובה: הערך היחידי האפשרי הוא $n=5$, עבורו סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה הוא מספר ממשי.

א. נתונה הפונקציה הזוגית $f(x)=e^{ax^2+bx+2}$ **.**

פונקציה זוגית סימטרית לציר ה- y **, כאשר** $f(x)=f(-x)$ **.**

$$e^{a(-x)^2+b(-x)+2}=e^{ax^2+bx+2}$$
$$ax^2-bx+2=ax^2+bx+2$$
$$-2bx=0$$

נכון לכל x **עבור** $b=0$**.**

תשובה: $b=0$**.**

ב. נתון כי לפונקציה יש בדיוק שתי נקודות פיתול.

עקב הזוגיות של הפונקציה, יהיו אלו נקודות פיתול עם שיעורי y **זהים, ושיעורי** x **שונים רק בסימנים.**

$$f'(x)=2axe^{ax^2+2}$$
$$f''(x)=2a\cdot\left(e^{ax^2+2}+x\cdot 2axe^{ax^2+2}\right)$$
$$\boxed{f''(x)=2ae^{ax^2+2}\cdot\left(1+2ax^2\right)}$$

הגורם השמאלי במכפלה, אינו אפס, כי אחרת $a=0$ **ו-** $f(x)=e^2$ **פונקציה קבועה ללא נקודות פיתול.**

הגורם הימני הוא ביטוי שמייצג פרבולה.

עבור $a>0$ **היא תהייה פרבולה בעלת מינימום, חיובית לכל** x **ולא תהיינה נקודות פיתול, כי** $f''(x)>0$ **.**

עבור $a<0$ **היא תהייה פרבולה בעלת מקסימום, שתחתוך את ציר ה-** x **פעמיים.**

במקרה זה, הפרבולה תעבור משליליות לחיוביות ומחיובית לשליליות,

והמכפלה כולה להפך (כי הגורם השמאלי שלילי , כאשר $a<0$**),**

והפונקציה תהייה קעורה כלפי מעלה בשני תחומים, וקעורה כלפי מטה ביניהם.

תשובה: הוכַח.

ג. נתון כי הפונקציה מחליפה קעירויות עבור $x=\pm 0.5$ **, ולכן** $f''(0.5)=0$ **.**

$$1+2a\cdot 0.5^2=0$$
$$\boxed{a=-2}$$

תשובה: $a=-2$.

ד. הפונקציה $f(x)=e^{-2x^2+2}$.

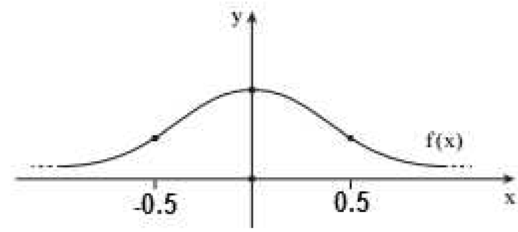
(1) הביטוי $-2x^2+2$ שואף ל- $-\infty$ עבור $x\to\pm\infty$, ולכן $f(x)=e^{-2x^2+2}\to e^{-\infty}\to 0$.

נראה גם על ידי הצבת ערכים: עבור $x=\pm5$ נקבל $y=1.03\cdot10^{-10}\to 0$.

תשובה: $y=0$ אסימפטוטה המאונכת לציר ה- y (אין אסימפטוטות אנכיות לציר ה- x).

(2) סקיצה מתאימה,

כאשר עבור $x=0$ מתקבלת נקודת מקסימום, כי מאפס את הנגזרת ונמצא בתחום של קעירות כלפי מטה.



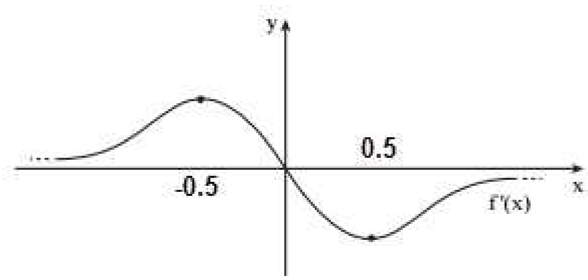
ה. שיקולים לסרטוט גרף הנגזרת.

הפונקציה $f(x)=e^{-2x^2+2}$ עולה בתחום $x<0$, ויורדת בתחום $x>0$ - ולכן הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות.

הפונקציה $f(x)=e^{-2x^2+2}$ קעורה כלפי מטה בתחום $-0.5<x<0.5$, ולכן בתחום זה $f''(x)<0$ ו- $f'(x)$ יורדת.

בשאר התחומים $f''(x)>0$ ו- $f'(x)$ עולה.

סקיצה מתאימה:



ו. נתונה הפונקציה $h(x)=f'(x)\cdot f''(x)$

פונקציה זו חיובית, כאשר סימני הנגזרת הראשונה והשנייה זהים (ושונים מאפס).

עבור $x<-0.5$ - $f(x)$ עולה וקעורה כלפי מעלה ולכן שני הסימנים חיוביים.

עבור $0<x<0.5$ - $f(x)$ יורדת וקעורה כלפי מטה ולכן שני הסימנים שליליים.

תשובה: $0<x<0.5$ או $x<-0.5$.

א. נתונה הפונקציה $g(x)=\ell n\,(2-e^x)$ **והפונקציה** $f(x)=\ell n\,(ae^x-be^{2x})$ **,(** $a,b>0$ **פרמטרים).**

לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.

תחום ההגדרה של $g(x)=\ell n\,(2-e^x)$ **הוא** $x<\ell n\,2 \quad \leftarrow e^x<2 \quad \leftarrow 2-e^x>0$**.**

בהתאם $x=\ell n\,2$ **מאפס את הביטוי** ae^x-be^{2x}**.**

$$ae^{\ell n\,2}-be^{2\ell n\,2}=0$$
$$2a-be^{\ell n\,4}=0$$
$$2a-4b=0$$
$$\boxed{a=2b}$$

תשובה: הוּכַח.

ב. ידוע שלשתי הפונקציות נקודה אחת משותפת, והיא נקודת הקיצון של $f(x)=\ell n\,(2be^x-be^{2x})$ **.**

נמצא את שיעורי נקודת הקיצון.

$$f\,'(x)=\frac{2be^x-2be^{2x}}{2be^x-be^{2x}}$$
$$\boxed{f\,'(x)=\frac{2be^x(1-e^x)}{2be^x-be^{2x}}}$$
$$e^x=1$$
$$x=0$$
$$g(0)=\ell n\,(2-e^0)=0$$

ובהתאם שיעורי הנקודה המשותפת הם $(0,0)$**.**

נציב ב- $f(x)=\ell n\,(2be^x-be^{2x})$

$$0=\ell n\,(2be^0-be^{2\cdot 0})$$
$$2b-b=1$$
$$\boxed{b=1} \quad \rightarrow \boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2\ ,\ b=1$ **, שיעורי נקודת הקיצון של** $f(x)=\ell n\,(2e^x-e^{2x})$ **הם** $(0,0)$**.**

ג. נראה ש- $g(x)=\ell n\,(2-e^x)$ יורדת וקעורה כלפי מטה ($\cap$) עבור $x<\ell n\,2$.

$$\boxed{g'(x)=\frac{-e^x}{2-e^x}}$$

הנגזרת שלילית (מונה שלילי, ומכנה חיובי על פי תחום הגדרה) ולכן הפונקציה יורדת עבור $x<\ell n\,2$.

$$g''(x)=\frac{-e^x\,(2-e^x)-e^x\cdot e^x}{(2-e^x)^2}$$

$$g''(x)=\frac{e^x(-2+e^x-e^x)}{2-e^x}$$

$$\boxed{g''(x)=\frac{-2e^x}{2-e^x}}$$

הנגזרת השנייה שלילית (מונה שלילי, ומכנה חיובי על פי תחום הגדרה),

ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה ($\cap$) עבור $x<\ell n\,2$.

תשובה: הוּכַח.

ד. נראה שההפרש בין שתי הפונקציות הוא פונקציה קווית.

$$f(x)-g(x)=\ell n\,(2e^x-e^{2x})-\ell n\,(2-e^x)$$

$$f(x)-g(x)=\ell n\frac{2e^x-e^{2x}}{2-e^x}$$

$$f(x)-g(x)=\ell n\frac{e^x(2-e^x)}{2-e^x}$$

$$f(x)-g(x)=\ell n e^x$$

$$\boxed{f(x)-g(x)=x}$$

ומכאן שההפרש בין שתי הפונקציות הוא הפונקציה הקווית $y=x$,

ולכן $f(x)$ מעל $g(x)$ מימין לנקודה המשותפת $(0,0)$, ומתחת לה משמאל לנקודה זו.

תשובה: הוּכַח.

ה. (1) תחום ההגדרה של שתי הפונקציות הוא $x<\ell n\,2$, או $x<0.693147$.

נבדוק מה קורה בסמוך למספר זה.

$f(0.6929)=-6.91 \quad \to -\infty$ **. זו ירידה איטית ל-** $-\infty$ **ובכל מקרה** $x=\ell n\,2$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** x **.**

$g(0.6929)=-7.61 \quad \to -\infty$ **. זו ירידה איטית ל-** $-\infty$ **ובכל מקרה** $x=\ell n\,2$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** x **.**

נבדוק מה קורה כאשר $x\to-\infty$

$f(-10)=-9.3\to-\infty$ **. זו ירידה איטית ל-** $-\infty$ **ובכל מקרה אין אסימפטוטה אופקית.**

$g(-10,000)=0.693=\ell n\,2$ **, כי עבור** $x\to-\infty$ **מתקיים** $e^x\to 0$ **ואז** $g(x)\to\ell n\,2$ **ויש אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $f(x)$ **:** $x=\ell n\,2$ **.** $g(x)$ **:** $x=\ell n\,2$ **,** $y=\ell n\,2$ **(משמאל) עבור** $x\to-\infty$ **.**

(2) סקיצה של הגרפים של שתי הפונקציות.