1

א. x - מספר המחברות שקנתה נטע בחנות.

y - מחיר מחברת.

נמלא בטבלה את הנתונים על הקניות של נטע ושל דנה.

	כמות (מחברות)	מחיר למחברת (שקלים)	סך הכול (שקלים)
קניית נטע לפני ההנחה	x	y	xy
קניית דנה לאחר ההנחה	$x+10$	$y-2$	$(x+10)(y-2)$

נטע שילמה 300 שקלים, והמשוואה המתאימה $xy=300$.

דנה שילמה 350 שקלים, והמשוואה המתאימה $(x+10)(y-2)=350$.

נפתור את מערכת המשוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases} xy=300 \quad \rightarrow \boxed{y=\frac{300}{x}} \\ (x+10)(y-2)=350 \end{cases}$$

$$(x+10)(\frac{300}{x}-2)=350$$

$$x\cdot\frac{300}{x}-2x+10\cdot\frac{300}{x}-20=350 \quad /+20$$

$$\frac{300x}{x}-2x+\frac{3000}{x}=370 \quad /\cdot x$$

$$300x-2x^2+3000=370x$$

$$0=2x^2+70x-3000$$

$$x_{1,2}=\frac{-70\pm170}{2\cdot2}$$

$$\boxed{x=25} \quad /\, x>0$$

$$y=\frac{300}{25} \quad \rightarrow \boxed{y=12}$$

תשובה: נטע קנתה 25 מחברות.

ב. מחיר מחברת אחת לפני ההנחה היה 12 שקלים.

א. על פי הציור הנתון האלכסון BD **עולה, ולכן שיפועו חיובי, ומשוואתו בהתאם היא** $y=4x-11$ **.**

על פי הציור הנתון האלכסון AC **יורד, ולכן שיפועו שלילי, ומשוואתו בהתאם היא** $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **, מתקיים** $y=0$ **:**

$$0=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}\quad /\cdot 4\quad \to 0=-x+7\quad \to x=7\quad \to \boxed{A(7,0)}$$

M **היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע:**

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4} \\ y=4x-11 \end{cases}$$

$$^{4/}4x-{}^{4/}11=-\frac{^{1/}1}{4}x+\frac{^{1/}7}{4}\quad /\cdot 4$$

$$16x-44=-x+7$$

$$17x=51\quad /:17$$

$$x=3\quad \to y=4\cdot 3-11=1\quad \to \boxed{M(3,1)}$$

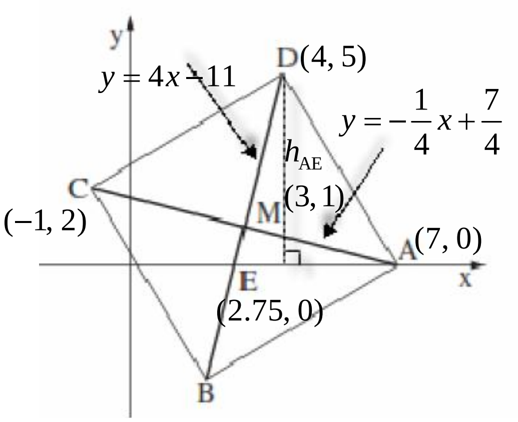
אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה:

$$3=\frac{x_C+7}{2}\qquad 1=\frac{y_C+0}{2}$$

$$6=x_C+7\qquad 2=y_C$$

$$-1=x_C\quad \to \boxed{C(-1,2)}$$

תשובה: $A(7,0)$ **,** $M(3,1)$ **,** $C(-1,2)$.



ב. שיעור ה- y **של הנקודה** D **הוא** 5**.**

$$5=4x-11\quad \to -4x=-16\quad /:(-4)\quad \to \boxed{x_D=4}\quad \to D(4,5)$$

תשובה: $x_D=4$ **.**

ג. (1) האלכסון BD חותך את ציר ה- x בנקודה E .

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x , מתקיים $y=0$:

$$0=4x-11 \quad \rightarrow -4x=-11 \quad /:(-4) \quad \rightarrow x=2.75 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{E}(2.75,\,0)}$$

תשובה: $\mathrm{E}(2.75,\,0)$

(2) על פי נוסחת שטח משולש $S_{\Delta\mathrm{AED}}=\dfrac{\mathrm{AE}\cdot h_{\mathrm{AE}}}{2}$.

$$\left.\begin{aligned} h_{\mathrm{AE}} &= y_{\mathrm{D}}-0=5-0=5 \\ \mathrm{AE} &= x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{E}}=7-2.75=4.25 \end{aligned}\right\} S_{\Delta\mathrm{AED}}=\frac{4.25\cdot 5}{2}=10.625$$

תשובה: שטח משולש AED הוא 10.625.

3

א. מעגל שמרכזו $M(4, 3)$ משיק לציר ה- y בנקודה A .

(1) הנקודה A נמצאת על ציר ה- y ולכן $x_A = 0$.

הרדיוס MA מאונך לציר ה- y , ולכן $y_A = y_M = 3$.

תשובה: $A(0, 3)$.

(2) נמצא את רדיוס המעגל: $R = x_M - x_A = 4 - 0 = 4$

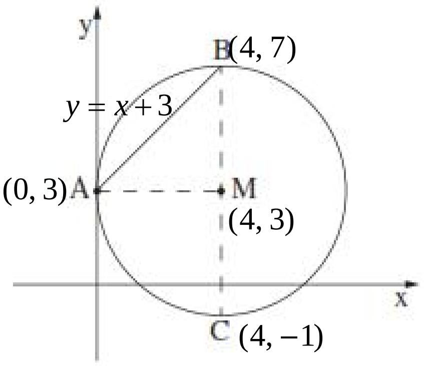
תשובה: משוואת המעגל היא $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$.

ב. AB מיתר במעגל ששיפועו 1 .

(1) נמצא את משוואת המיתר, עבור $A(0, 3)$, $m_{AB} = 1$.

$$y - 3 = 1(x - 0)$$
$$y - 3 = x \quad / +3$$
$$\boxed{y = x + 3}$$

תשובה: משוואת המיתר AB היא $y = x + 3$.



(2) נמצא את שיעורי הנקודה B .

נציב $y = x + 3$ במשוואת המעגל $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$.

$$(x-4)^2 + (x+3-3)^2 = 16$$
$$(x-4)(x-4) + x^2 = 16$$
$$x^2 - 4x - 4x + 16 + x^2 = 16 \quad / -16$$
$$2x^2 - 8x = 0$$
$$2x(x-4) = 0 \quad \rightarrow x_A = 0$$
$$x_B = 4 \quad \rightarrow y_B = 4 + 3 = 7 \quad \rightarrow \boxed{B(4, 7)}$$

תשובה: $B(4, 7)$.

ג. מרכז המעגל, $M(4, 3)$, הוא אמצע הקוטר BC .

$x_M = x_B = 4$, לכן הקוטר מקביל לציר ה- y ,

וגם $x_C = x_M = 4$

$$y_C = y_M - R$$
$$y_C = 3 - 4 = -1$$

ובהתאם שיעורי הנקודה C הם $(4, -1)$.

תשובה: שיעורי הנקודה C הם $(4, -1)$.

4

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}$ **.**

תחום ההגדרה הוא $x \neq 0$ **כי** $x = 0$ **מאפס את המכנה.**

תשובה: תחום הגדרה הוא $x \neq 0$ **.**

ב. נמצא את נקודת הקיצון ואת סוגה.

$$f'(x) = \frac{2x}{2} - \frac{8}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = x - \frac{8}{x^2}}$$

$${}^{x^2/}x - \frac{{}^{1/}8}{x^2} = 0 \quad / \cdot x^2$$

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8}$$

$$x = 2 \quad \to f(2) = \frac{2^2}{2} + \frac{8}{2} = 6 \quad \to \boxed{(2, 6)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = 1 - \frac{8}{1^2} < 0 \\ f'(3) = 3 - \frac{8}{3^2} > 0 \end{array}\right\} Min$$

תשובה: תשובה: $(2, 6)$ **מינימום.**

ג. $f'(-1) = -1 - \frac{8}{(-1)^2} < 0$

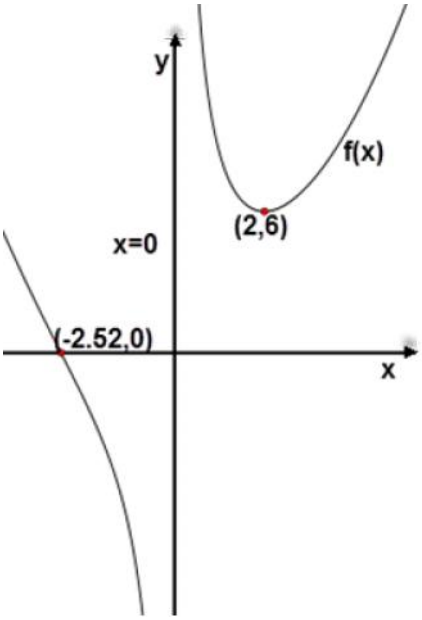
הנגזרת שלילית בתחום $x < 0$ **, ולכן הפונקציה יורדת בתחום זה.**

תשובה: הפונקציה יורדת בתחום $x < 0$ **.**

ד. נתון כי נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא $(-2.52,0)$.

נשים לב כי $x=0$ (ציר ה- y) הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.

נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



5

א. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-3x^2+6x$.

נמצא את שיעור ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ואת סוגן.

$$\boxed{f'(x)=-3x^2+6x}$$

$$0=-3x^2+6x$$

$$0=3x(-x+2)$$

$$3x=0 \qquad -x+2=0$$

$$x=0 \qquad x=2$$

$$f''(x)=-6x+6$$

$$f''(0)=-6\cdot 0+6>0 \quad \to Min, \quad f''(2)=-6\cdot 2+6<0 \quad \to Max$$

ניתן להוכיח קיצון גם באמצעות טבלת עלייה וירידה.

$$f'(-1)=-3\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)=-9<0, \quad f'(1)=-3\cdot 1^2+6\cdot 1=3>0, \quad f'(3)=-3\cdot 3^2+6\cdot 3=-9<0$$

x	3	2	1	0	-1
$f'(x)$	-	0	+	0	-
מסקנה	↘	**Max**	↗	**Min**	↘

תשובה: $x=0$ מינימום , $x=2$ מקסימום.

ב. שיעור ה- y של נקודת המקסימום של $f(x)$ הוא 0 . לכן, $(2,0)$ הם שיעורי נקודת המקסימום.

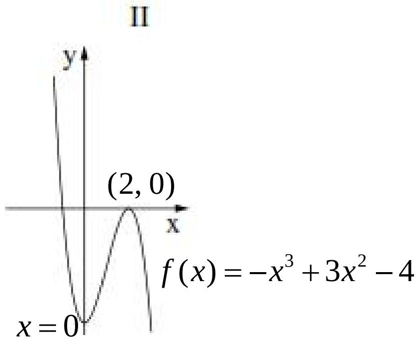
$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$f(x)=\int(-3x^2+6x)\,dx$$

$$f(x)=\frac{-3x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+c$$

$$f(x)=-x^3+3x^2+c$$

נציב את שיעורי נקודת המקסימום $(2,0)$.



$$0=-2^3+3\cdot 2^2+c$$

$$0=-8+12+c$$

$$0=4+c$$

$$c=-4$$

$$\boxed{f(x)=-x^3+3x^2-4}$$

תשובה: $f(x)=-x^3+3x^2-4$

ג. הגרף המתאים הוא גרף II , על פי נקודת מקסימום $(2,0)$ ונקודת מינימום שבה $x=0$.

תשובה: גרף II .

6

א. הגרף של $g(x)=\frac{1}{4}x+5$ הוא גרף של ישר עולה (שיפוע חיובי), ולכן מתאים לגרף I .

הגרף של $f(x)=\sqrt{x}$ הוא גרף II , שניתן לראות שמתחיל בראשית הצירים,
כי תחום ההגדרה $x\ge 0$ ו- $f(0)=0$.

תשובה: $g(x)=\frac{1}{4}x+5$ גרף I , $f(x)=\sqrt{x}$ גרף II .

ב. הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *אורך הקטע* AB .

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה B ב- x .

לכן שיעורי הנקודה B הנמצאת על גרף $f(x)=\sqrt{x}$ הם $\text{B}(x,\sqrt{x})$.

הישר AB מקביל לציר ה- y ולכן $x_\text{A}=x_\text{B}=x$.

שיעורי הנקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)=\frac{1}{4}x+5$ הם $\text{A}(x,\frac{1}{4}\text{x}+5)$.

$$\text{AB}=y_\text{A}-y_\text{B}$$

$$\boxed{\text{AB}=\frac{1}{4}x+5-\sqrt{x}}$$

$$\boxed{(\text{AB})'(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$0=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{4}\qquad (\ )^2$$

$$\frac{{}^{4/}1}{4x}=\frac{{}^{x/}1}{16}\qquad /\cdot 16x$$

$$\boxed{x=4}$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון: $\text{AB}'(5)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\sqrt{5}}=0.03>0$, $\text{AB}'(3)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\sqrt{3}}=-0.04<0$.

x	5	4	3
$\text{AB}'(x)$	**+**	0	**-**
מסקנה	↗	**Min**	↘

תשובה: עבור $x=4$ אורך הקטע AB הוא מינימלי.

(2) שיעורי הנקודה $A(4, \frac{1}{4}\cdot 4+5) \quad \rightarrow A(4, 6)$ **ושיעורי הנקודה** $B(4, \sqrt{4}) \rightarrow B(4, 2)$

לכן, $AB = 6-2 = 4$ **(או** $AB(4) = \frac{1}{4}\cdot 4+5-\sqrt{4} = 4$ **).**

תשובה: האורך המינימלי של הקטע AB **הוא** 4 **.**