1

א. מדובר בסדרת תשלומים המהווים סדרה חשבונית עולה, כי כל תשלום גדול בסכום קבוע מזה שלפניו.

מחיר המחשב הוא $10,000$ **שקלים.**

סכום עשרת התשלומים הראשונים הוא 25% **ממחיר המחשב, כלומר** 2500 **שקלים** $= 0.25\cdot 10000$**.**

סכום חמשת התשלומים הבאים הוא 20% **ממחיר המחשב, כלומר** 2000 **שקלים** $= 0.2\cdot 10000$**.**

נרשום את מערכת המשוואות המתאימה, ונפתח כל אחת מהמשוואות לחוד:

$$\begin{cases} S_{1-10} = 2500 \\ S_{11-15} = 2000 \end{cases}$$

$$S_{1-10} = 2500$$

$$2500 = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2}$$

$$2500 = 5(a_1 + a_1 + 9d) \quad /:5$$

$$\boxed{500 = 2a_1 + 9d}$$

$$S_{11-15} = 2000$$

$$2000 = \frac{5(a_{11} + a_{15})}{2}$$

$$2000 = 2.5(a_1 + 10d + a_1 + 14d) \quad /:2.5$$

$$\boxed{800 = 2a_1 + 24d}$$

$$-\begin{cases} 500 = 2a_1 + 9d \\ 800 = 2a_1 + 24d \end{cases}$$

$$-300 = -15d \quad /:14$$

$$\boxed{d = 20}$$

$$500 = 2a_1 + 9\cdot 20$$

$$320 = 2a_1 \quad /:2$$

$$\boxed{a_1 = 160}$$

תשובה: התשלום הראשון הוא 160 **שקלים.**

ב. נמצא את מספר התשלומים, כאשר $S_n = 10,000$**.**

$$\frac{n(2\cdot 160 + 20\cdot(n-1))}{2} = 10000 \quad /\cdot 2$$

$$n(320 + 20n - 20) = 20000$$

$$20n^2 + 300n - 20000 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-300 \pm 1300}{40} \quad \rightarrow \boxed{n = 25}$$

הפתרון השני שלילי ולכן נפסל.

תשובה: המחשב נמכר ב- 25 **תשלומים.**

א. בפירמידה ישרה הגובה יורד למרכז המעגל החוסם את הבסיס.

כאשר הבסיס הוא משולש זהו מפגש האנכים האמצעיים.

כאשר המשולש ישר זווית, כמו בפירמידה שלפנינו $\sphericalangle ACB = 90°$,

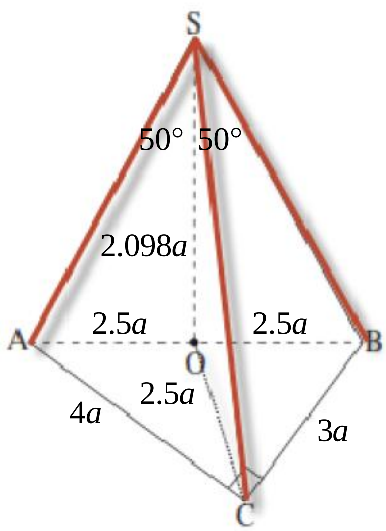
מפגש האנכים האמצעיים הוא באמצע היתר.

הנקודה O היא אמצע היתר AB בבסיס ABC .

ולכן SO הוא גובה הפירמידה SABC.

ב. (1) על פי משפט פיתגורס, ב- ΔABC :

$$(AB)^2 = (3a)^2 + (4a)^2$$
$$(AB)^2 = 9a^2 + 16a^2$$
$$(AB)^2 = 25a^2 \quad \sqrt{\ }$$
$$AB = 5a \quad / (AB > 0)$$



לכן רדיוס המעגל החוסם שווה $\frac{AB}{2} = \frac{5a}{2} = 2.5a$

תשובה: רדיוס המעגל החוסם את הבסיס הוא $2.5a$.

(2) $\sphericalangle ASB = 100°$. נחשב את SO , גובה הפירמידה,

במשולש ישר הזווית ΔSOB .

ΔSAB שווה שוקיים (מקצועות צדדיים שווים בפירמידה ישרה),

לכן ב- ΔSAB , SO הוא גם גובה לבסיס AB וחוצה $\sphericalangle ASB$.

<u>ΔSOB</u>

$$\tan 50° = \frac{OB}{SO}$$
$$SO = \frac{2.5a}{\tan 50°}$$
$$\boxed{SO = 2.098a}$$

תשובה: גובה הפירמידה הוא $2.098a$.

(3) SC הוא מקצוע צדדי של הפירמידה, והזווית בין המקצועות הצדדיים לבסיס שוות בפירמידה ישרה.

לכן ניתן לחשב את $\sphericalangle SBO$, שבין SB להיטל שלו, OB , לבסיס .

$$\sphericalangle SBO = \frac{180° - 100°}{2} = 40° .$$

(ניתן גם לחשב אותה ב- ΔSOC : $\tan \sphericalangle SCO = \frac{SO}{CO} = \frac{2.098a}{2.5a} \rightarrow \sphericalangle SCO = 40°$.)

תשובה: הזווית שבין המקצוע הצדדי SC לבסיס הפירמידה היא בת $40°$.

ג. נתון כי נפח הפירמידה הוא 113.28 **סמ"ק.**

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}}{2}\cdot\mathrm{SO}$$

$$113.28=\frac{1}{3}\cdot\frac{4a\cdot3a}{2}\cdot2.098a$$

$$113.28=4.196a^3 \quad /:4.196$$

$$27=a^3$$

$$a=\sqrt[3]{27}$$

$$\boxed{a=3cm}$$

תשובה: $a=$ 3 **ס"מ** .

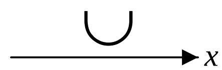
א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell og_2(x^2+4x+5)-2\ell og_4 10$ **.**

נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה- ℓog **לא יכולה לקבל מספרים אי-חיוביים.**

$$x^2+4x+5>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

ואין פתרון ממשי.



מתקבלת פרבולה בעלת מינימום, חיובית לכל x **.**

תשובה: תחום ההגדרה - כל x **.**

ב. כדאי, תחילה, לפשט את תבנית הפונקציה, גם עבור סעיף זה, וגם עבור סעיף ג.

$$f(x)=\ell og_2(x^2+4x+5)-2\ell og_4 10$$

$$f(x)=\ell og_2(x^2+4x+5)-2\cdot\frac{\ell og_2 10}{\ell og_2 4}$$

$$f(x)=\ell og_2(x^2+4x+5)-2\cdot\frac{\ell og_2 10}{2}$$

$$f(x)=\ell og_2(x^2+4x+5)-\ell og_2 10$$

$$f(x)=\ell og_2\frac{x^2+4x+5}{10}$$

$$\boxed{f(x)=\ell og_2(0.1x^2+0.4x+0.5)}$$

בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$\ell og_2(0.1x^2+0.4x+0.5)=0$$

$$0.1x^2+0.4x+0.5=1$$

$$0.1x^2+0.4x-0.5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-0.4\pm 0.6}{0.2}$$

$$x_1=1\ \rightarrow\ \boxed{(1,0)}\qquad x_2=-5\ \rightarrow\ \boxed{(-5,0)}$$

בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:**

$$f(0)=\ell og_2(0.1\cdot 0^2+0.4\cdot 0+0.5)$$

$$f(0)=\ell og_2 0.5$$

$$f(0)=-1\ \rightarrow\ \boxed{(0,-1)}$$

תשובה: $(1,0)$ **,** $(-5,0)$ **,** $(0,-1)$**.**

ג. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה ואת סוגה.

$$\boxed{f(x) = \ell og_2(0.1x^2 + 0.4x + 0.5)}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{0.2x + 0.4}{(0.1x^2 + 0.4x + 0.5)\,\ell n\, 2}}$$

$$0.2x + 0.4 = 0 \quad \to x = -2$$

$$f'(-3) = \frac{0.2\cdot(-3) + 0.4}{+} < 0, \quad f'(-1) = \frac{0.2\cdot(-1) + 0.4}{+} > 0 \quad \to x = -2, Min$$

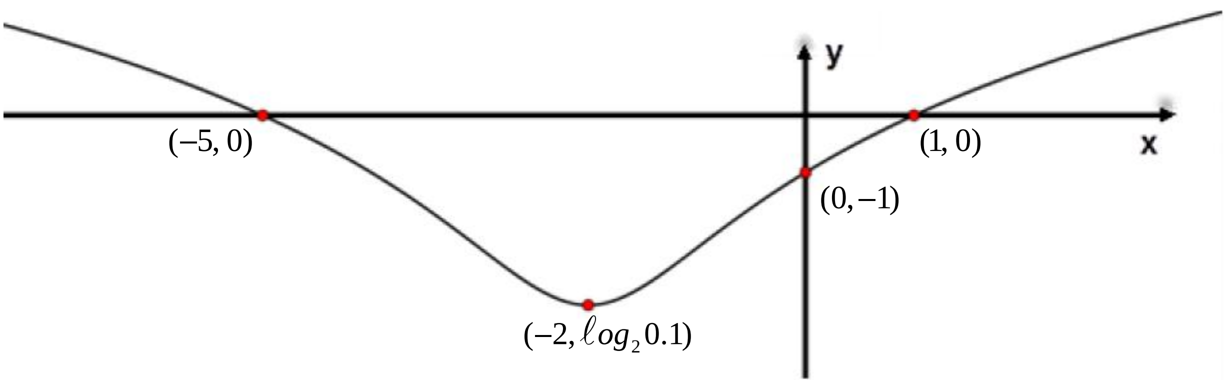
$$f(-2) = \ell og_2(0.1\cdot(-2)^2 + 0.4\cdot(-2) + 0.5)$$

$$f(-2) = \ell og_2 0.1 \approx -3.32$$

$$\boxed{(-2, \ell og_2 0.1)}$$

תשובה: $(-2, \ell og_2 0.1)$ **מינימום.**

ד. נסרטט את גרף הפונקציה.



א. נתונה כי $f'(x)=2\cos(2x)$ **בתחום** $0\le x\le \pi$.

נמצא את שיעורי ה- x **של נקודות הקיצון הפנימיות של** $f(x)$ **ואת סוגן.**

$$2\cos 2x=0$$
$$\cos 2x=0$$
$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$$
$$k=0 \quad \to x=\frac{\pi}{4}$$
$$k=1 \quad \to x=\frac{3\pi}{4}$$
$$f''(x)=-4\sin(2x)$$
$$f''(\frac{\pi}{4})=-4\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})=-4<0 \quad \to Max$$
$$f''(\frac{3\pi}{4})=-4\sin(2\cdot\frac{3\pi}{4})=4>0 \quad \to Min$$

תשובה: $x=\frac{\pi}{4}$ **מקסימום,** $x=\frac{3\pi}{4}$ **מינימום.**

ב. הישר $y=0$ **משיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום (הפנימית).**

לכן הפונקציה עוברת בנקודה $(\frac{\pi}{4},0)$.

$$f(x)=\int(2\cos(2x))\,dx$$
$$f(x)=\frac{2\sin 2x}{2}+c$$
$$0=\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})+\text{c}$$
$$0=1+c$$
$$c=-1$$
$$\boxed{f(x)=\sin 2x-1}$$

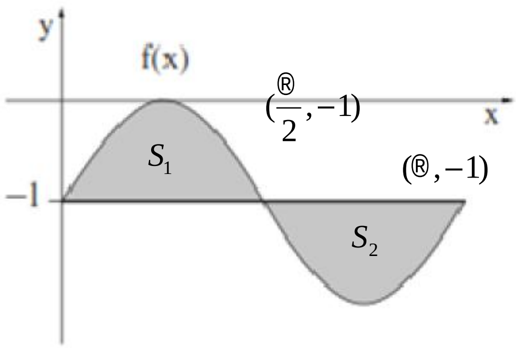
תשובה: $f(x)=\sin 2x-1$.

ג. נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)=\sin 2x-1$ עם הישר $y=-1$.

$$\sin 2x-1=-1$$
$$\sin 2x=0$$
$$2x=\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{2}k$$
$$k=0 \quad x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,-1)}$$
$$k=1 \quad x=\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{2},-1)}$$
$$k=2 \quad x=\pi \quad \rightarrow \boxed{(\pi,-1)}$$

תשובה: $(0,-1)$ **,** $(\frac{\pi}{2},-1)$ **,** $(\pi,-1)$**.**

ד. נחשב את גודל השטח האפור.



$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-1-(-1))\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)\,dx$$
$$S_1=(-\frac{\cos 2x}{2})\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$S_1=(-\frac{\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})}{2})-(-\frac{\cos(2\cdot 0)}{2})$$
$$S_1=(0.5)-(-0.5)$$
$$\boxed{S_1=1}$$

$$S_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1-(\sin 2x-1))\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin 2x)\,dx$$
$$S_2=(\frac{\cos 2x}{2})\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$S_2=(\frac{\cos(2\cdot\pi)}{2})-(\frac{\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})}{2})$$
$$S_2=(0.5)-(-0.5)$$
$$\boxed{S_2=1}$$

וגודל השטח המבוקש הוא $S_1+S_2=1+1=2$

תשובה: גודל השטח הוא 2 **.**

נוסחת הגידול והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$ **, כאשר** M_0 **- הכמות ההתחלתית**

q **הוא גורם הגידול,** M_t **הכמות לאחר זמן** t **.**

א. ב- 3 **שנים (מ-** 1.1.2008 **ועד** 1.1.2011**) גדלה כמות הדגים ב-** 33.1% **.**

לכן, אם M_0 **היא הכמות ב-** 1.1.2008 **אז הכמות ב-** 1.1.2011 **היא** $\frac{100+33.1}{100} \cdot M_0 = 1.331M_0$.

$$1.331M_0 = M_0 \cdot q^3 \quad / : M_0$$
$$1.331 = q^3$$
$$\sqrt[3]{1.331} = q$$
$$\boxed{q = 1.1}$$
$$1.1 = \frac{100+p}{100} \quad / \cdot 100$$
$$110 = 100 + p \quad / -100$$
$$\boxed{p = 10}$$

תשובה: אחוז הגידול השנתי של כמות הדגים הוא 10%**.**

ב. ב- 1.1.2011 **נמכרה מחצית מכמות הדגים שהייתה בבריכה .**

נמצא מתי תגיע כמות הדגים, בחזרה לכמות שלפני המכירה,

כלומר תכפיל את עצמה, בהנחה של גדילה של 10% **לשנה.**

נסמן מחדש ב- M_0 **את הכמות ב-** 1.1.2011 **ונבדוק לאחר כמה שנים תגיע ל-** $2M_0$ **.**

$$2M_0 = M_0 \cdot 1.1^t \quad / : M_0$$
$$2 = 1.1^t$$
$$\ell n 2 = \ell n 1.1^t$$
$$\ell n 2 = t \ell n 1.1$$
$$\frac{\ell n 2}{\ell n 1.1} = t$$
$$\boxed{t = 7.27}$$

תשובה לאחר 7.27 **שנים תחזור כמות הדגים לכמות שהייתה לפני המכירה ב-** 1.1.2011**.**

ג. נתון כי כמות הדגים תכפיל את עצמה, לאחר 5.27 **שנים** $= 7.27 - 2$**.**

$$2M_0 = M_0 \cdot q^{5.27} \quad / : M_0$$

$$2 = q^{5.27}$$

$$\sqrt[5.27]{2} = q$$

$$\boxed{q = 1.14}$$

$$1.14 = \frac{100 + p}{100} \quad / \cdot 100$$

$$114 = 100 + p \quad / -100$$

$$\boxed{p = 14}$$

תשובה: אחוז הגידול השנתי החדש של כמות הדגים הוא 14%**.**