א. נסמן $P(s,t)$ נקודה על המקום הגיאומטרי, הפרבולה $y^2=16x$, מכאן ש- $t^2=16s$.

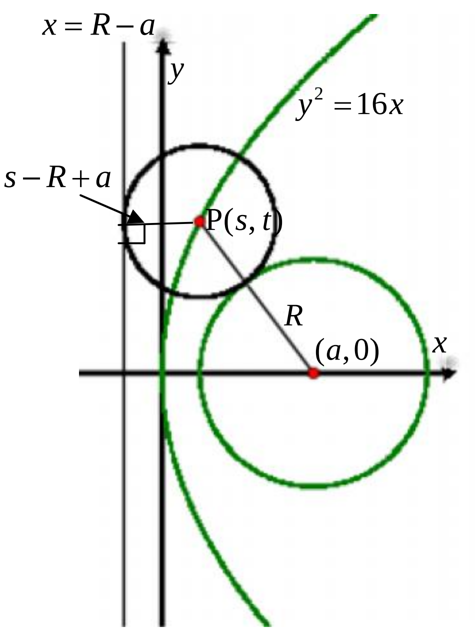
$P(s,t)$ היא מרכז המעגל המשיק לישר $x=R-a$ $(0<R<a)$ מימין לישר,

ולכן רדיוס המעגל, שמרכזו $P(s,t)$, הוא $s-(R-a)=s-R+a$.

מעגל זה משיק גם למעגל $(x-a)^2+y^2=R^2$, שמרכזו בנקודה $(a,0)$ ורדיוסו R.

לכן רדיוס המעגל, שמרכזו $P(s,t)$, שווה גם להפרש בין אורך קטע המרכזים לרדיוס המעגל R.

$$\sqrt{(s-a)^2+(t-0)^2}-R=s-R+a$$
$$\sqrt{(s-a)^2+t^2}=s+a$$
$$\sqrt{(s-a)^2+16s}=s+a \quad \leftarrow t^2=16s$$
$$(\sqrt{(s-a)^2+16s})^2=(s+a)^2$$
$$(s-a)^2+16s=(s+a)^2$$
$$s^2-2as+a^2+16s=s^2+2as+a^2$$
$$-2as+16s=2as \quad /:s>0$$
$$-2a+16=2a$$
$$16=4a$$
$$\boxed{a=4}$$



נבדוק גם עבור $s=0$: במקרה זה מרכז המעגל $P(s,t)$ הוא ראשית הצירים,

כאשר מרחקו מהישר $x=R-a$ הוא $a-R$.

אורך קטע המרכזים הוא a,

ורדיוס המעגל הקנוני, מהראשית לנקודת ההשקה שבין המעגלים שווה גם ל- $a-R$.

ומתקבל ש- $a-R=a-R$, כלומר פסוק אמת.

נעיר שגם $P(0,0)$, נמצאת על הפרבולה $y^2=16x$.

ועוד: הפרמטר של הפרבולה $y^2=16x$ הוא $P=8$,

והמוקד שלה $F(4,0)$ הוא מרכז המעגל $(x-4)^2+y^2=R^2$, והמדריך הוא $x=-4$.

<u>דרך פיתרון חליפית</u>

פרבולה היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקיהן מישר (המדריך) ומנקודה קבועה (המוקד) שווה.

במקרה זה הנקודה הקבועה היא $(a,0)$ והישר הוא $x=-a$ (לא הישר הנתון),

ששניהם נמצאים במרחק של $r+R$ מנקודה $P(s,t)$:

אורך קטע המרכזים והמרחק מהמדריך - $s-(R-a)=r \quad \to s-(-a)=r+R$.

לכן, עבור הפרבולה $y^2=16x$, הישר הוא המדריך $x=-4$ והנקודה הקבועה היא המוקד $F(4,0)$,

ולכן התשובה המיידית לתרגיל היא $a=4$.

תשובה: $a=4$.

ב. שני מעגלים שמרכזיהם P ו- M משיקים מבחוץ למעגל ולישר הנתונים.

רדיוס כל אחד מהמעגלים האלה הוא $5-R$, והוא שווה למרחק המרכז מהישר, כלומר ל- $s-R+4$.

נקבל $s-R+4=5-R$ ומכאן ש- $s=1$.

מרכזי המעגלים נמצאים, על פי התיאור, על הפרבולה $y^2=16x$

ולכן אם נציב $x=1$, נקבל שמרכזי המעגלים הם $(1,-4)$, $(1,4)$.

הערה - נקודת חיתוך של שני משיקים, העוברים בנקודות סימטריות לציר ה- x, תהייה תמיד על ציר ה- x.

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך.

משוואת משיק לפרבולה, בנקודה שעל הפרבולה, היא $yy_0=P(x+x_0)$.

עבור $P=8$ ו- $x_0=1$ נקבל שמשוואות המשיקים הן:

$$\begin{cases} y\cdot 4=8(x+1) \\ y\cdot(-4)=8(x+1) \end{cases}.$$

אם נחסיר את המשוואה השנייה מהראשונה, נקבל $y=0$.

נציב $y=0$ במשוואה הראשונה ונקבל $0=8(x+1)$ ולכן $x=-1$.

תשובה: שיעורי נקודת המפגש בין שני הישרים המשיקים הם $(-1,0)$.

2

א. נקודה A **נמצאת במישור** $®_1 : x - z - 2 = 0$**.**

מישור זה מקביל לציר ה- y **, כי שיעור ה-** y **בווקטור המקדמים של המישור** $\underline{n} = (1, 0, -1)$ **הוא** 0 **.**

לכן ישר המאונך למישור זה, מאונך גם לציר ה- y **והזווית המבוקשת היא** $90°$**.**

ניתן, כמובן, גם על ידי חישוב בעזרת נוסחת הזווית בין שני וקטורים:

$$\cos\sim = \frac{|(1, 0, -1)(0, 1, 0)|}{|(1, 0, -1)||(0, 1, 0)|} = \frac{|0+0+0|}{\sqrt{1+0+1}\sqrt{0+1+0}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \quad \rightarrow \sim = 90°$$

תשובה: $90°$ **.**

ב. נקודה B **ונקודה** C **נמצאות במישור** $®_2 : x - z - 12 = 0$**.**

נשים לב שגם מישור זה מקביל לציר ה- y **וגם, כמובן, למישור** $®_1 : x - z - 2 = 0$**.**

הישר AC **מקביל לישר שההצגה הפרמטרית שלו היא** $\underline{x} = t(2, 0, -2)$ **,**

כלומר ווקטור הכיוון הוא $\underline{x} = (1, 0, -1)$ **, כווקטור המקדמים של המישורים הנתונים,**

ולכן אורך הקטע AC **שווה למרחק בין שני המישורים, והישר עצמו מאונך למישורים.**

$$\text{AC} = \frac{|-2-(-12)|}{\sqrt{1+0+1}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

תשובה: אורכו של AC **הוא** $5\sqrt{2}$**.**

ג. נתון גם: $\overrightarrow{\text{BC}} = (2, -1, c)$ **.**

ראינו ש- AC **מאונך למישורים הנתונים, לכן:** $\overrightarrow{\text{BC}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 0$ **.**

$$(1, 0, -1)(2, -1, c) = 0$$
$$2 + 0 - c = 0$$
$$c = 2 \quad \rightarrow \overrightarrow{\text{BC}} = (2, -1, 2)$$

משולש ABC **ישר זווית (** $\sphericalangle\text{ACB} = 90°$ **)**

$$\left|\overrightarrow{\text{BC}}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

$$S_{\Delta\text{ABC}} = \frac{\text{AC} \cdot \text{BC}}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3}{2} = 7.5\sqrt{2}$$

תשובה: שטח משולש ABC **הוא** $7.5\sqrt{2}$ **.**

א. z **הוא מספר מרוכב שונה מ-** 0 **.**

$\frac{1}{z}, \quad z+\frac{1}{z}, \quad z,$ **הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית,**

לכן: $2(z+\frac{1}{z}) = z+\frac{1}{z}$

$$z+\frac{1}{z}=0$$

$$z^2+1=0$$

$$z=i, \quad z=-i$$

תשובה: $z=i, \quad z=-i$.

ב. נתון $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ **ו-** $0° < \arg(z) < 90°$ **(הזווית של המספר המרוכב היא חדה,** z **ברביע הראשון של מישור גאוס)**

נסמן: $z = r\,cis^{-}$ **ולכן** $\bar{z} = r\,cis\,(-^{-})$ **וגם:** $\frac{1}{z} = \frac{cis\,0}{r\,cis^{-}} = \frac{1}{r}cis\,(-^{-})$ **.**

לכן $|z| = r$ **ו-** $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r}$ **. מכאן ש-** $r=\frac{1}{r}$ **והערך המוחלט של** z **הוא** 1**.**

נקבל ש: $z+\frac{1}{z} = cis^{-} + cis\,(-^{-})$ **, שהוא סכום של שני מספרים צמודים.**

כידוע סכום של שני מספרים צמודים הוא מספר ממשי, ונמחיש ע"י ההצגה $z=x+iy$.

$x+iy+(x-iy)=2x$ **.**

כיוון ש- $0° < \arg(z) < 90°$ **, הרי ש-** $x>0$ **ולכן** $z+\frac{1}{z}$ **על הקרן החיובית של ציר ה-** x **והזווית המתאימה היא** $0°$ **.**

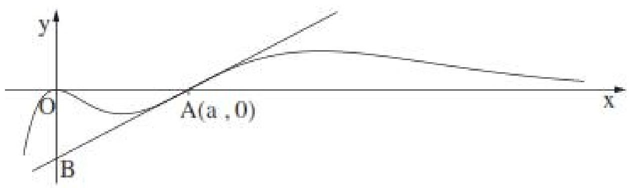
תשובה: $\arg(z+\frac{1}{z}) = 0°$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(x^3-ax^2)e^{-x}$ **(** $a>0$ **פרמטר).**

תשובה: תחום ההגדרה כל x.

ב. גרף הפונקציה $f(x)=(x^3-ax^2)e^{-x}$ **חותך את ציר ה-** x **בראשית הצירים ובנקודה** A **.**

נמצא את שיעורי הנקודה A **, שבה מתקיים** $y=0$ **.**



הציור באדיבות אתר משרד החינוך

$$0=(x^3-ax^2)e^{-x} \quad /:e^{-x}$$
$$0=x^2(x-a)$$ **.**
$$x=0,\ x=a$$

ולכן נקודת ההשקה היא $\text{A}(a,0)$ **.**

נמצא את שיפוע המשיק, בנקודה $\text{A}(a,0)$ **,**

שחותך את ציר ה- y **בנקודה** $\text{B}(0,y_\text{B})$ **.**

$$f'(x)=(3x^2-2ax)e^{-x}+(x^3-ax^2)e^{-x}(-1)$$
$$f'(x)=e^{-x}(3x^2-2ax-x^3+ax^2)$$
$$m_{\text{AB}}=f'(a)=e^{-a}(3a^2-2a\cdot a-a^3+a\cdot a^2)$$
$$m_{\text{AB}}=f'(a)=\frac{a^2}{e^a}$$

נמצא את שיעורה- y **של נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-** y **.**

$$\frac{a^2}{e^a}=\frac{y_\text{B}-0}{0-a} \quad \rightarrow y_\text{B}=-\frac{a^3}{e^a}$$

שטח המשולש שיוצר המשיק עם הצירים הוא $\frac{8}{e^a}$**.**

$$S_{\Delta\text{ABO}}=\frac{\text{OA}\cdot\text{OB}}{2}$$
$$\frac{8}{e^a}=\frac{(a-0)(0-(-\frac{a^3}{e^a}))}{2} \quad /\cdot 2$$
$$\frac{16}{e^a}=\frac{a^4}{e^a}$$
$$16=a^4 \quad /\sqrt[4]{\ }$$
$$\boxed{a=2} \quad \leftarrow a>0$$

תשובה: $a=2$.

ג. נציב $a=2$ **ונקבל שהפונקציה היא** $f(x)=(x^3-2x^2)e^{-x}$ **.**

נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, כאשר את סוגם נקבע על פי הגרף הנתון.

$$f'(x)=(3x^2-4x)e^{-x}+(x^3-2x^2)e^{-x}(-1)$$
$$f'(x)=e^{-x}(3x^2-4x-x^3+2x^2)$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{5x^2-4x-x^3}{e^x}}$$
$$0=5x^2-4x-x^3=-x(x^2+5x-4)$$
$$0=-x(x-1)(x-4)$$
$$x=0 \quad \to y=0 \quad \to (0,0)$$
$$x=1 \quad \to y=(1^3-2\cdot 1^2)e^{-1}=-\frac{1}{e} \quad \to (1,-\frac{1}{e})$$
$$x=4 \quad \to y=(4^3-2\cdot 4^2)e^{-4}=\frac{32}{e^4} \quad \to (4,\frac{32}{e^4})$$

תשובה: $(0,0)$ **מקסימום ,** $(1,-\frac{1}{e})$**מינימום ,** $(4,\frac{32}{e^4})$ **מקסימום.**

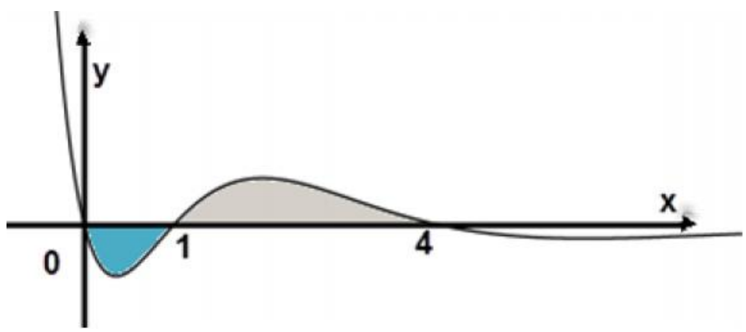
ד. נקודות האפס של פונקציית הנגזרת הן: $(0,0)$ **,** $(1,0)$**,** $(4,0)$ **, על פי הסעיף הקודם.**

נסרטט סקיצה של גרף הנגזרת,

על פי תחומי החיוביות ($1<x<4$ **או** $x<0$**) והשליליות (**$x>4$ **או** $0<x<1$**) שלה,**

הזהים בהתאמה לתחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)=(x^3-2x^2)e^{-x}$ **,**

כאשר ציר ה- x **הוא אסימפטוטה אופקית של גרף הנגזרת, על פי הנתון.**



הערה – תיתכנה יותר משלוש נקודות קיצון לגרף הנגזרת, אולם לא חישבנו נקודות פיתול, ולכן לא ניתן לדעת האם קיימות.

ה. נחשב תחילה את השטח הכחול: $S=\int_0^1(0-f'(x))\,dx=-f(x)\Big]_0^1=-f(1)-(-f(0))=f(0)-f(1)$

נחשב את השטח האפור : $S=\int_1^4(f'(x)-0)\,dx=f(x)\Big]_1^4=f(4)-f(1)$

ובהתאם גודל השטח המבוקש הוא: $f(0)-f(1)+f(4)-f(1)=f(0)-2f(1)+f(4)=0-2\cdot(-\frac{1}{e})+\frac{32}{e^4}=\frac{32}{e^4}+\frac{2}{e}$

תשובה: $\frac{32}{e^4}+\frac{2}{e}$ **.**

א. הפונקציה $f(x)=x^2$ היא אי-שלילית ונקודת האפס של הפרבולה היא ראשית הצירים.

הפונקציה $g(x)=\ell n\,(ax)$ מוגדרת עבור $x>0$ והיא פונקציה עולה ($g'(x)=\frac{a}{ax}=\frac{1}{x}>0$).

נמצא את נקודת האפס שלה:

$$\ell n\,(ax)=0$$
$$ax=1$$
$$x=\frac{1}{a}$$

ולכן $g(x)=\ell n\,(ax)$ חיובית עבור $x>\frac{1}{a}$.

הישר $x=k$ עובר בין שתי נקודות החיתוך של הפונקציות ולכן ערכי k בהכרח גדולים מ- $\frac{1}{a}$.

תשובה: הראינו כי ערכי k אינם יכולים להיות בתחום $0<k<\frac{1}{a}$.

ב. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא היקף המלבן ABCD .

שיעור ה- x של הנקודות A ו- B הוא k .

בהתאם שיעורי הנקודה A שעל $f(x)=x^2$ הם $A(k,k^2)$, ושל B שעל $g(x)=\ell n\,(ax)$ הם $B(k,\ell n\,(ak))$,

מכיוון ו- AB מקביל לציר ה- y , הרי ש: $AB=y_B-y_A=\ell n\,(ak)-k^2$

$$\boxed{P_{ABCD}=2(k+\ell n\,(ak)-k^2)\quad k>\frac{1}{a}}$$

$$(P)'(k)=2(1+\frac{a}{ak}-2k)$$
$$(P)'(k)=2(1+\frac{1}{k}-2k)$$
$$\boxed{(P)'(k)=2(\frac{k+1-2k^2}{k})}$$
$$0=k+1-2k^2$$
$$0=-2k^2+k+1$$
$$k_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{-4}$$
$$\boxed{k=1}\quad \leftarrow k>0$$
$$(P)''(k)=2(-\frac{1}{k^2}-2)<0\quad \rightarrow\cap\quad \rightarrow \max$$

תשובה: $k=1$, עבורו היקף המלבן ABCD הוא מקסימלי.

ג. עבור $k=1$ **שיעורי הנקודה** B **הם** $(1, \ell n\, a)$

שיפוע המשיק לפונקציה $g(x)=\ell n\,(ax)$ **בנקודה זו הוא** $g'(x)=\frac{a}{ax}=\frac{1}{x} \quad \to g'(1)=\frac{1}{1}=1$

המשיק עובר בנקודה $(0,0)$ **.**

לכן:

$$1=\frac{\ell n\, a-0}{1-0}$$
$$1=\ell n\, a$$
$$a=e$$

והפונקציה היא $g(x)=\ell n\, ex$ **, או לאחר פישוט:** $g(x)=\ell n\, e+\ell n\, x \quad \to g(x)=1+\ell n\, x$ **.**

תשובה: $g(x)=\ell n\, ex$ **או** $g(x)=1+\ell n\, x$ **.**