נסמן ב- v את מהירות הזרם מ- A ל- B (ובהתאם מהירות הרפסודה) (קמ"ש)
ובהתאם $15-v$ מהירות הסירה מנמל B לנמל A ו- $15+v$ בדרך חזרה.
נסמן ב- t את זמן ההפלגה של שני כלי השיט עד הגעתן המשותפת לנמל B (שעות) .
נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
עד המפגש	רפסודה מ- A למפגש	5	v	$5v$
	סירה מ- B למפגש	5	$15-v$	$5(15-v)$
מהתחלה עד נמל B	רפסודה מ- A ל- B	t	v	tv
	סירה מ- B ל- A	$\frac{tv}{15-v}$	$15-v$	tv
	סירה מ- A ל- B	$\frac{tv}{15+v}$	$15+v$	tv

כלי השיט יצאו באותה שעה 9.00 בבוקר והגיעו באותה שעה, לכן המשוואה המתאימה:

$$t=\frac{tv}{15-v}+\frac{tv}{15+v}\quad /:t>5$$
$$(15-v)(15+v)=v(15+v)+\text{v}(15-v)$$
$$225-v^2=15v+v^2+15v-v^2$$
$$v^2+30v-225=0$$
$$v_{1,2}=\frac{-30\pm\sqrt{1800}}{2}$$
$$v=6.213\quad(v>0)$$

מהירות הזרם היא 6.213 קמ"ש, ובהתאם עברה הסירה מ- B למפגש: 43.93 ק"מ $=5(15-6.213)$.
לכן, הרפסודה תעבור מרחק זה בזמן של 7.07 שעות $=43.93/6.213$.
בהתאם, היא תגיע 12.07 שעות מיציאתה בשעה 9.00 מנמל A , ולכן תגיע לאחר השעה 9.00 בערב.
(בערך בשעה 9.04).
תשובה: הסירה והרפסודה *לא* יגיעו עד לשעה 9.00 בערב באותו היום .

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $4.5(\cdot 27^1-1)=117$ אגף שמאל: $9+27+81=117$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $9+27+81+...+3^{3k+1}=4.5(27^k-1)$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, לכן צ"ל

$$\underline{9+27+81+...+3^{3k+1}}+3^{3k+2}+3^{3k+3}+3^{3k+4}=4.5(27^{k+1}-1)$$

$$\downarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4.5(27^k-1)+9\cdot 3^{3k}+27\cdot 3^{3k}+81\cdot 3^{3k}=4.5(27\cdot 27^k-1)$$

$$\Leftrightarrow 4.5(27^k-1)+9\cdot 27^k+27\cdot 27^k+81\cdot 27^k=4.5(27\cdot 27^k-1)$$

$$\Leftrightarrow 4.5\cdot 27^k-4.5+9\cdot 27^k+27\cdot 27^k+81\cdot 27^k=121.5\cdot 27^k-4.5$$

$$\Leftrightarrow 121.5\cdot 27^k-4.5=121.5\cdot 27^k-4.5$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$, הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו,

אז היא נכונה עבור $n=k+1$ לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. יש למצוא נוסחה עבור $9+27+81+...+3^{3n+1}+...+3^{3n+7}$

קל לראות שאם נציב $n+2$ במקום n בביטוי $3n+1$ נקבל את הביטוי $3n+7$

על פי הטענה שהוכחה בסעיף א, עבור $n+2$ נקבל שנוסחת הסכום היא $4.5(27^{n+2}-1)$.

תשובה: הנוסחה היא $4.5(27^{n+2}-1)$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+x-a}{x^2-x+a}$, $a>1$ **, פרמטר ונתון כי הפונקציה מוגדרת לכל** x **.**

(1) נחפש אסימפטוטות לפונקציה $f(x)$ **המקבילות לצירים.**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-a}{x^2-x+a}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x-}{x^2}-\frac{a}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{a}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+0-0}{1-0+0}=1$$

, לכן $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

אין אסימפטוטה אנכית, כי הפונקציה מוגדרת לכל x **ולכן רציפה.**

תשובה: $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

(2) נמצא את נקודות הקיצון ואת סוגן

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2-x+a)-(2x-1)(x^2+x-a)}{(x^2-x+a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3-2x^2+2ax+x^2-x+a-(2x^3+2x^2-2ax-x^2-x+a)}{(x^2-x+a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3-2x^2+2ax+x^2-x+a-2x^3-2x^2+2ax+x^2+x-a}{(x^2-x+a)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x^2+4ax}{(x^2-x+a)^2}}$$

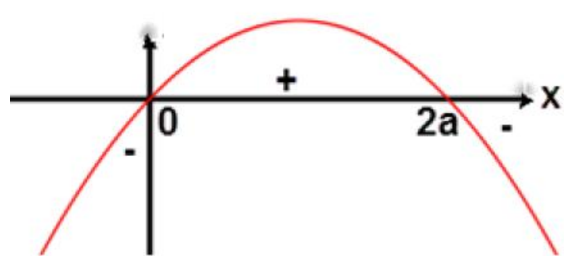
$0=-2x^2+4ax$

$0=2x(-x+2a)$

$x=0\quad\rightarrow\boxed{(0,-1)}$

$x=2a\quad\rightarrow y=\frac{4a^2+2a-a}{4a^2-2a+a}\quad /:(a>1)\quad\rightarrow(2a,\frac{4a+1}{4a-1})$

גרף סימני הנגזרת (מכנה חיובי)

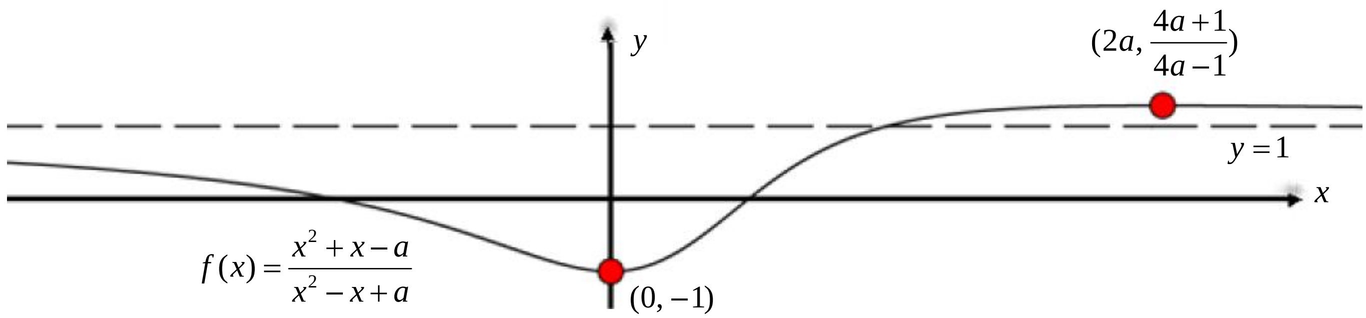


ב- $x=0$ **עוברים מנגזרת שלילית לחיובית, כלומר מירידה לעלייה ולכן מינימום.**

ב- $x=2a$ **עוברים מנגזרת חיובית לשלילית, כלומר מעלייה לירידה ולכן מקסימום.**

תשובה: $(0,-1)$ **מינימום ,** $(2a,\frac{4a+1}{4a-1})$ **מקסימום.**

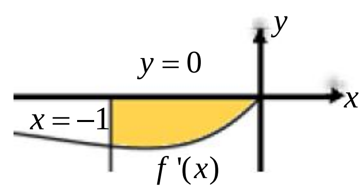
(3) הסקיצה המתאימה, לרבות שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x



ב. גרף הנגזרת, בתחום $x<0$, הוא שלילי, כיוון שהפונקציה יורדת עבור $x<0$,

ונקודת האפס בתחום $x\le 0$ היא 0 על פי תת סעיף א (2):

על פי הנתון השטח הצהוב שווה ל- $\frac{1}{2}$.



$$S=\int_{-1}^{0}(0-f'(x))dx=-f(x)\Big]_{-1}^{0}=-f(0)+f(-1)=-(-1)+\frac{1-1-a}{1+1+a}=1-\frac{a}{2+a}$$

$$\frac{1}{2}=1-\frac{a}{2+a}$$

$$\frac{a}{2+a}=\frac{1}{2}$$

$$2a=2+a$$

$$\boxed{a=2}$$

בהתאם הפונקציה היא $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-x+2}$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $f(x)=0$ ולכן $x^2+x-2=0$.

נקבל את המשוואה $(x+2)(x-1)=0$ והפתרונות הם $x=-2,1$.

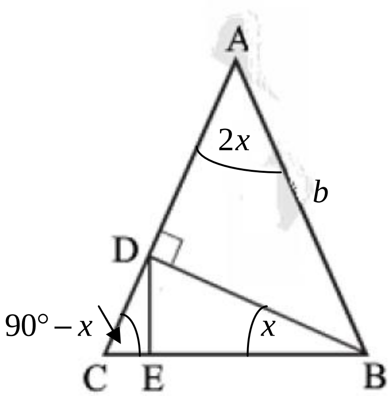
תשובה: נקודות החיתוך עם ציר ה- x הן $(1,0)$ ו- $(-2,0)$.

הפונקציה שיש להביא *למקסימום* **היא** *אורך האנך* DE.

ΔABC **שווה שוקיים, ולכן זוויות הבסיס שוות:** $\sphericalangle C = \frac{180° - 2x}{2} = 90° - x$.

נציג פתרון תחילה עבור משולש שווה שוקיים, חד זווית, בו הגובה לשוק בתוך המשולש,
ולאחר מכן משולש קהה זווית בו הגובה לשוק מתקבל מחוץ למשולש.
(אם המשולש ישר זווית ושווה שוקיים, אז הגובה לשוק, הוא השוק השנייה, תאור שאינו מתאים לשאלה.)

ΔDBC **ישר זווית, ולכן** $\sphericalangle DBE = x$.



<u>עבור משולש חד זווית (סרטוט עליון)</u>

ΔABD

$\sin 2x = \frac{BD}{AB}$

$\boxed{b\sin 2x = BD}$

ΔBDE

$\sin x = \frac{DE}{BD}$

$\boxed{b\sin 2x \sin x = DE}$

<u>עבור משולש קהה זווית (סרטוט תחתון)</u>

ΔBCD

$\sin(180° - 2x) = \frac{BD}{AB}$

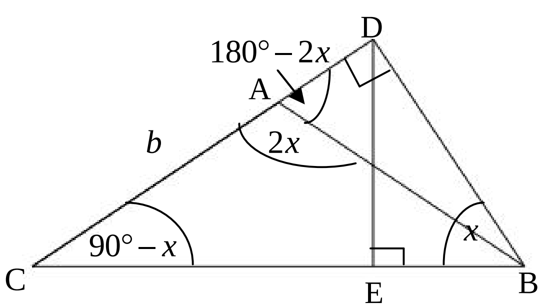
$\boxed{b\sin 2x = BD}$

ΔBDE

$\sin x = \frac{DE}{BD}$

$\boxed{b\sin 2x \sin x = DE}$

ולכן: $\boxed{DE(x) = b\sin 2x \sin x}$ **<u>בשני המקרים</u>**



$(DE)'(x) = b(2\cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x)$

$(DE)'(x) = b(2\cos 2x \sin x + 2\sin x \cos x \cos x)$

$\boxed{(DE)'(x) = 2b\sin x(\cos 2x + \cos^2 x)}$

$\cancel{0 = \sin x} \quad \leftarrow 0 < x < \frac{®}{2}$

$\cos 2x + \cos^2 x = 0$

$2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0$

$\cos^2 x = \frac{1}{3}$

$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \rightarrow \cancel{x = 2.186 + 2®k} \quad \leftarrow 0 < x < \frac{®}{2}$

$\cos x = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \rightarrow x = 0.955 + 2®k \quad \rightarrow x = 0.955 \quad \leftarrow 0 < x < \frac{®}{2}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0.9) = 0.25b > 0 \\ f'(1) = -0.21b < 0 \end{array}\right\} \max$

קבלנו ש- DE **באורך מקסימלי עבור** $x = 0.955$ **,**

ובמעלות $x = \frac{0.955}{\pi} \cdot 180^\circ = 54.72^\circ$ **.**

$$\sphericalangle BAC = 2x = 2 \cdot 54.72^\circ$$

$$\boxed{\sphericalangle BAC = 109.43^\circ}\ .$$

כלומר הציור המתאים, בדיעבד, הוא הציור התחתון.

תשובה: $\sphericalangle BAC = 109.43^\circ$ **, עבורה האורך של** DE **הוא מקסימלי.**

א. (1) $\sphericalangle BAC = \sim$, $\sphericalangle FAB =$ **(נתון). שני המעגלים משיקים מבפנים בנקודה** A **(נתון).**
קטע המרכזים של שני המעגלים נמצא על AF **, ולכן**

FEA **קוטר במעגל הגדול, ו-** EA **קוטר במעגל הקטן.**

ℓ **משיק משותף לשני המעגלים בנקודה** A

לכן FEA **מאונך לישר** ℓ **קוטר מאונך למשיק בנקודת ההשקה).**

$BC \parallel \ell$ **(נתון) ולכן** $CB \perp AF$ **(אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך לשיר שלישי**

אז גם הישר השני מאונך לישר השלישי) ו- $\sphericalangle BCA = 90° - (\sim + \ )$ **(סכום זוויות** $180°$**).**

תשובה: $\sphericalangle BCA = 90° - (\sim + \ )$ **.**

(2) יש למצוא את היחס $\frac{AC}{AB}$**.**

$\sphericalangle CBA = 90° +$ **(זווית חיצונית שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה).**

נמצא את היחס $\frac{AC}{AB}$ **באמצעות משפט הסינוסים ב-** ΔCAB **.**

$$\frac{AC}{\sin(90° + \ )} = \frac{AB}{\sin(90° - (\sim + \ ))}$$

$$\boxed{\frac{AC}{AB} = \frac{\cos}{\cos(\sim + \ )}}$$

תשובה: $\frac{AC}{AB} = \frac{\cos}{\cos(\sim + \ )}$ **.**

ב. $AF = 2R$ **קוטר המעגל הגדול ,** $AE = 2r$ **קוטר המעגל הקטן ולכן** $\sphericalangle FCA = \sphericalangle EBA = 90°$ **.**

ΔAFC

$$\frac{AC}{\sin(90° - (\sim + \ ))} = 2R$$

$$\boxed{AC = 2R\cos(\sim + \ )}$$

ΔABE

$$\frac{AB}{\sin(90° - \ )} = 2r$$

$$\boxed{AB = 2r\cos}$$

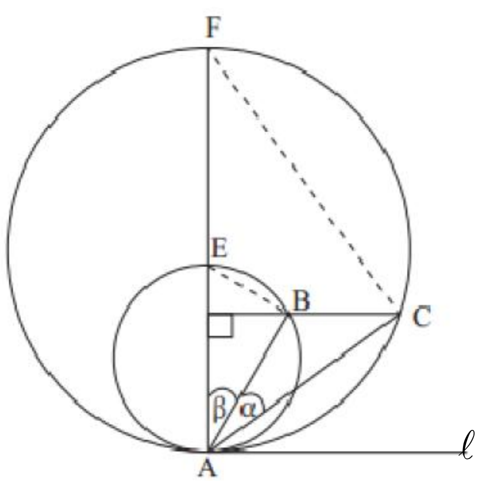
נחלק את שתי המשוואות.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{2R\cos(\sim + \ )}{2r\cos}$$

$$\frac{\cos}{\cos(\sim + \ )} = \frac{R\cos(\sim + \ )}{r\cos}$$

$$\boxed{\frac{R}{r} = \frac{\cos^2}{\cos^2(\sim + \ )}}$$

תשובה: $\frac{R}{r} = \frac{\cos^2}{\cos^2(\sim + \ )}$ **.**



הציור באדיבות אתר משרד החינוך