א. (1) הנקודה $C(x_1, y_1)$ **נמצאת על הפרבולה** $y^2 = 4x$ **ולכן שיעוריה** $C(\frac{y_1^2}{4}, y_1)$.

בצורה דומה, שיעורי הנקודה $D(x_2, y_2)$ **שעל הפרבולה הם** $D(\frac{y_2^2}{4}, y_2)$.

נחשב את שיפוע המיתר CD:

$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2 - y_1^2}{4}}$$

$$m_{CD} = \frac{4(y_2 - y_1)}{y_2^2 - y_1^2} = \frac{4(y_2 - y_1)}{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}$$

$$m_{CD} = \frac{4}{y_2 + y_1}$$

תשובה: הוכַח.

(2) הנקודה $(x, 3)$ **היא אמצע המיתר** CD **, לכן על פי נוסחת אמצע קטע** $3 = \frac{y_1 + y_2}{2} \to y_1 + y_2 = 6$.

ובהתאם לתת-הסעיף הקודם $m_{CD} = \frac{4}{y_2 + y_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

תשובה: $m_{CD} = \frac{2}{3}$.

ב. (1) נתון כי מרחק על נקודה על הפרבולה $y^2 = 4x$ **מהישר** $x = a$ **שווה למרחקה מהנקודה** $(1, 0)$.

הפרמטר של הפרבולה הוא 2 **ולכן המוקד שלה הוא** $F(1, 0)$ **ומשוואת המדריך** $x = -1$.

מרחק נקודה שעל הפרבולה מהמוקד שווה למרחקה מהמדריך, לכן $a = -1$.

תשובה: $a = -1$.

(2) מרחק הנקודה $C(\frac{y_1^2}{4}, y_1)$**, <u>שברביע הראשון</u>, מהישר** $x = -2$ **הוא** 6 .

$$\frac{y_1^2}{4} - (-2) = 6 \quad \to y_1^2 = 16 \quad \to y = 4 \quad \to \boxed{C(4, 4)}$$

נמצא את משוואת המיתר CD **שעובר בנקודה** $C(4, 4)$ **ושיפועו** $m_{CD} = \frac{2}{3}$.

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 4)$$

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}}$$

תשובה: משוואת המיתר CD **היא** $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

(בגרות עד פברואר 13 מועד חורף שאלון 35807)

בגרות עד פברואר 14 מועד חורף שאלון 35807

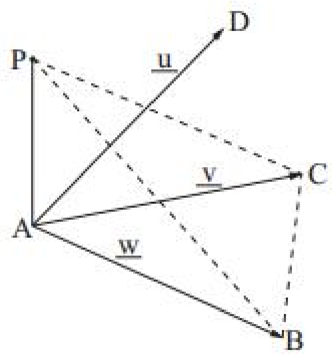
א. $\sphericalangle DAC = 60°$ **,** $\sphericalangle BAC = 60°$ **,** $\sphericalangle DAB = 90°$ **., כאשר** $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$ **,** $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ **,** $\overrightarrow{AB} = \underline{w}$ **.**

אם הווקטורים $\underline{u}$ **,** $\underline{v}$ **ו-** $\underline{w}$ **היו באותו מישור, אז** $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC + \sphericalangle BAC = 60° + 60° = 120°$

ונקבל סתירה לנתון $\sphericalangle DAB = 90°$ **.**

תשובה: הווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ **ו-** $\underline{w}$ ***לא*** **באותו מישור.**

ב. נציג את הנתונים והמשמעויות ונסביר בהמשך.



$\boxed{\overrightarrow{AD} = \underline{u}}$ $\quad |\underline{u}| = 2 \quad \underline{u}^2 = 4$

$\boxed{\overrightarrow{AC} = \underline{v}}$ $\quad |\underline{v}| = 2 \quad \underline{v}^2 = 4$

$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{w}}$ $\quad |\underline{w}| = 2 \quad \underline{w}^2 = 4$

$\underline{u}\cdot\underline{v} = 2 \quad \underline{v}\cdot\underline{w} = 2 \quad \underline{u}\cdot\underline{w} = 0$

הסבר:

$$\sphericalangle DAC = 60° \quad \rightarrow \underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|\cos 60° = 2\cdot 2\cdot\cos 60° = 2$$

$$\sphericalangle BAC = 60° \quad \rightarrow \underline{v}\cdot\underline{w} = |\underline{v}||\underline{w}|\cos 60° = 2\cdot 2\cdot\cos 60° = 2$$

$$\sphericalangle DAB = 90° \quad \rightarrow \underline{u}\cdot\underline{w} = 0$$

נתון כי $\overrightarrow{AP} = a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w}$ **מאונך למישור** ABC **ולכן מאונך לכל וקטור במישור.**

$$(a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w})\underline{w} = 0$$

$$a\underline{u}\underline{w} + b\underline{v}\underline{w} + \underline{w}^2 = 0$$

$$2b + 4 = 0 \quad \rightarrow \boxed{b = -2}$$

$$(a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w})\underline{v} = 0$$

$$a\underline{u}\underline{v} + b\underline{v}^2 + \underline{w}\underline{v} = 0$$

$$2a + 4b = 0 \quad \rightarrow 2a + 4(-2) + 2 = 0 \quad \rightarrow \boxed{a = 3}$$

נמצא את האורך של $\overrightarrow{AP} = 3\underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w}$

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{9\underline{u}^2 + 4\underline{v}^2 + \underline{w}^2 + 6\underline{u}\cdot\underline{w} - 12\underline{u}\cdot\underline{v} - 4\underline{v}\cdot\underline{w}}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{9\cdot 4 + 4\cdot 4 + 4 + 6\cdot 0 - 12\cdot 2 - 4\cdot 2} = \sqrt{24}$$

$$\boxed{|\overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{6}}$$

תשובה: $|\overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{6}$ **.**

ג. AT **גובה לבסיס, ולכן חוצה זווית הראש, במשולש שווה צלעות** ABC **(זווית ראש** $60°$ **במשולש שווה שוקיים...)**

כיוון ש- AT **הוא גם תיכון הרי שגם** PT **הוא תיכון ל-** BC **ב-** ΔPBC**.**

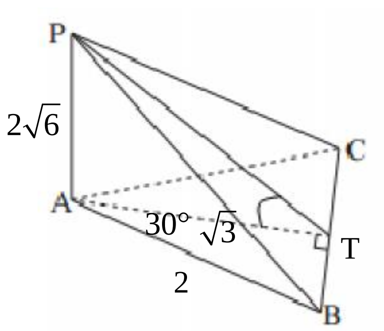
ΔPBC **שווה שוקיים (** $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ **משפט חפיפה צלע זווית צלע),**

כאשר PT **ו-** AT **אנכים לישר החיתוך** BC **,**

ולכן הזווית המבוקשת היא $\sphericalangle PTA$ **, המתקבלת במשולש ישר הזווית** ΔPTA **(** $\sphericalangle PAT = 90°$ **).**

ΔABT **:** $\cos 30° = \frac{AT}{AB} \rightarrow AT = 2\cos 30° \rightarrow AT = \sqrt{3}$

ΔPTA **:** $\tan \sphericalangle PTA = \frac{AP}{AT} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{\sphericalangle PTA = 70.53°}$



תשובה: הזווית בין המישורים היא בת $70.53°$**.**

א. המקום הגיאומטרי של המספרים המרוכבים z **מקיים** $|z-12-5i|=7$**.**

נסמן $z=a+bi$

$$|z-12-5i|=7$$
$$|a+bi-12-5i|=7$$
$$|(a-12)+(b-5)i|=7$$
$$\sqrt{(a-12)^2+(b-5)^2}=7$$
$$(a-12)^2+(b-5)^2=49$$

וזה המעגל $(x-12)^2+(y-5)^2=49$ **, שמרכזו בנקודה** $(12,5)$ **ורדיוסו** 7 **.**

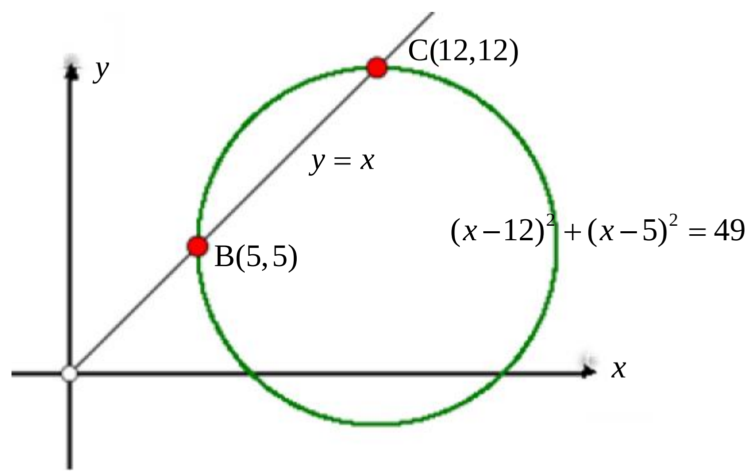
המקום הגיאומטרי של המספרים המרוכבים w **מקיים** $\arg(w)=45°$**.**

כלומר זה הישר, היוצא מהראשית ושיפועו $m=\tan 45°=1$ **ומשוואתו** $y=x$ $(x>0)$ **.**

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של הישר והמעגל .

$$(x-12)^2+(x-5)^2=49$$
$$2x^2-34x+120=0$$
$$x_{1,2}=\frac{34\pm14}{4} \rightarrow \boxed{B(5,5)} \quad , \quad \boxed{C(12,12)}$$

הסרטוט המתאים:



ב. $z_1=r_1\ cis45°, \quad z_2=r_2\ cis45°$ **(אין צורך לחשב את הערך המוחלט של המספרים, כפי שנראה תכף).**

$$z_1\cdot z_2=r_1\ cis45°\cdot r_2\ cis45°=r_1\cdot r_2 cis(45°+45°)$$
$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\ cis(90°)$$

תשובה: $\arg(z_1\cdot z_2)=90°$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2e^{\sqrt{x}}$.

(1) הביטוי בתוך השורש צריך להיות. אי-שלילי.

תשובה: $x\ge 0$.

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$

(כמו תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של $f(x)$ **).**

$$f'(x)=\frac{2e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \quad \rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{2x\sqrt{x}}}$$

$$\sqrt{x}-1=0 \quad \rightarrow x=1$$

$$f''(0.5)=\frac{(+)(-)}{+}<0 \quad , \quad f''(2)=\frac{(+)(+)}{+}>0$$

תשובה: עלייה – $x>1$ **, ירידה –** $0<x<1$.

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $y=2\cdot f'(x)$.

שיעור ה- x **בנקודת הקיצון שווה לזה של** $f'(x)$ **, כלומר** $x=1$ **וגם סוג הקיצון (מינימום) אינו משתנה,**

כי כפלנו פי 2 **(מספר חיובי) את פונקציית הנגזרת.**

$$y(1)=2f'(1)=2\cdot\frac{e^{\sqrt{1}}}{\sqrt{1}}=2e \quad \rightarrow \boxed{(1,2e)}$$

הפונקציה $y=f(x^2)$ **בתחום** $x>0$ **היא הפונקציה** $y=2e^{x}$ $\rightarrow y=2e^{\sqrt{x^2}}$.

נציב $x=1$ **ונקבל** $y=2e^1=2e$ **ולכן הנקודה** $(1,2e)$ **נמצאת גם על הפונקציה** $y=f(x^2)$.

תשובה: $(1,2e)$.

ג. על פי הנתון הפונקציה $y=f(x^2)=2e^x$ **(** $x>0$ **) והפונקציה** $y=2\cdot f'(x)$ **נפגשות רק בנקודה** $(1,2e)$ **.**

עבור $x=2$ **נקבל** $y=f(2^2)=2e^2=14.78$ **בראשונה ו-** $y=2\cdot f'(2)=2\cdot\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=5.817$ **,**

כלומר בתחום $x>1$ $y=f(x^2)=2e^x$ **היא הפונקציה העליונה.**

נחשב את השטח, שגודלו נתון $8e-2\cdot f(a)$ **, בין שתי הפונקציות והישרים** $x=1$ **ו-** $x=a$ $(a>1)$ **.**

$$S=\int_1^a(2e^x-2\cdot f'(x))\,dx=$$

$$S=2e^x-2f(x)\Big]_1^a$$

$$S=(2e^a-2\cdot f(a))-(2e^1-2\cdot 2e^{\sqrt{1}})$$

$$\boxed{S=2e^a-2\cdot f(a)+2e}$$

$$2e^a-2\cdot f(a)+2e=8e-2\cdot f(a)$$

$$2e^a=6e$$

$$e^a=3e$$

$$a=\ell n3e=\ell n3+\ell ne$$

$$\boxed{a=1+\ell n3}$$

תשובה: $a=1+\ell n3$ **.**

נוסחת הגידול והדעיכה היא $M_t = M_0 \cdot q^t$

שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן הוא q. פרק הזמן הוא t.

M_0 - הכמות ראשונית , M_t - כמות לאחר t תקופות.

בתאריך 1.1.2012 התשלום החודשי עבור הדירה היה 5,900 שקל.

התשלום גדל מדי חודש ב- 0.2% לכן פי $q = \frac{100+0.2}{100} = 1.002$.

בתאריך 1.1.2012 משכורתו של רן הייתה 8,000 שקל.

המשכורת גדלה מדי חודש ב- 1.2% לכן פי $q = \frac{100+1.2}{100} = 1.012$.

רן יכול לשלם עבור הדירה רק אחרי התאריך שבו התשלום עבורה יהיה $0.6 = 60\%$ ממשכורתו החודשית.

המשוואה המתאימה: $0.6 \cdot 8,000 \cdot 1.012^t = 5,900 \cdot 1.002^t$.

$$0.6 \cdot 8,000 \cdot 1.012^t = 5,900 \cdot 1.002^t$$

$$\frac{48}{59} = \frac{1.002^t}{1.012^t}$$

$$\frac{48}{59} = \left(\frac{1.002}{1.012}\right)^t$$

$$\ell n\left(\frac{48}{59}\right) = \ell n\left(\frac{1.002}{1.012}\right)^t$$

$$\ell n\left(\frac{48}{59}\right) = t \ell n\left(\frac{1.002}{1.012}\right)$$

$$\frac{\ell n\left(\frac{48}{59}\right)}{\ell n\left(\frac{1.002}{1.012}\right)} = t$$

$$\boxed{t \approx 20.78}$$

תשובה: כעבור 21 חודשים, בערך.

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = x^n \cdot \ell n(x^n)$ כאשר n טבעי וזוגי.

פונקציה לוגריתמית מקבלת רק מספרים חיוביים ולכן תחום ההגדרה $x^n > 0$.

כיוון ש- כאשר n טבעי וזוגי, הרי שניתן להציב גם מספרים שליליים.

תשובה: תחום ההגדרה $x \neq 0$.

(2) נראה שהפונקציה זוגית.

נשים לב שכיוון ש- n טבעי וזוגי הרי ש $(-x)^n = x^n$.

$$f(-x) = (-x)^n \cdot \ell n((-x)^n)$$

$$f(-x) = x^n \cdot \ell n(x^n)$$

$$f(-x) = f(x)$$

תשובה: הפונקציה זוגית.

(3) נמצא את משוואת המשיק המקביל לציר ה- x , כלומר ששיפועו 0 .

$$f(x) = x^n \cdot \ell n(x^n)$$

נמצא את הנקודה שבה הנגזרת מתאפסת :

$$\boxed{f(x) = x^n \cdot \ell n(x^n)}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}\ell nx^n + x^n \cdot \frac{nx^{n-1}}{x^n}$$

$$\boxed{f'(x) = nx^{n-1}(\ell nx^n + 1)}$$

$$\ell nx^n + 1 = 0$$

$$\ell nx^n = -1$$

$$x^n = e^{-1}$$

$$x^n = \frac{1}{e} \quad \rightarrow x = \pm(\frac{1}{e})^{\frac{1}{n}}$$

$$f(x) = x^n \cdot \ell n(x^n)$$

$$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} \cdot (-1)$$

$$f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$$

קיים רק ישר אחד כזה, כי פונקציית הנגזרת מתאפסת אומנם פעמיים, עבור שיעורי x נגדיים,

אולם שיעור ה- y בנקודת ההשקה שווה בשני המקרים, עקב הזוגיות.

תשובה: משוואת הישר המשיק היא $y = -\frac{1}{e}$.