א. נסמן ב- x (שקלים) את מחיר הספה, וב- y (שקלים) את מחיר הכורסה.

מחיר הספה גדול ב- 1500 שקל ממחיר הכורסה, ובהתאם $x=y+1500$.

(נוח להישאר עם שני משתנים, בגלל העבודה עם האחוזים בהמשך.)

בסוף השנה עלה מחיר הספה ב- 8%, ולכן מחירה התייקר ב- $\frac{8}{100}\cdot x=0.08x$.

בסוף השנה ירד מחיר הכורסה ב- 10%, ולכן מחירה הוזל ב- $\frac{10}{100}\cdot y=0.1y$.

מחיר הספה עלה באותו הסכום שהמחיר של 2 כורסאות ירד, ולכן $0.08x=2\cdot 0.1y$ ומכאן ש- $x=2.5y$.

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x=y+1500 \\ x=2.5y \end{cases}$$

$$2.5y=y+1500$$

$$1.5y=1500 \quad /:1.5$$

$$\boxed{y=1000} \quad \rightarrow \boxed{x=2500}$$

תשובה: מחיר הספה $2,500$ שקל ומחיר הכורסה $1,000$ שקל, לפני שינוי המחירים.

ב. משה קנה בסוף השנה 3 כורסאות וספה אחת.

עבור הכורסאות שילם: $3\cdot 90\%\cdot 1000=3\cdot 0.9\cdot 1000=$ ₪ $2,700$.

עבור הספה שילם: $108\%\cdot 2500=1.08\cdot 2500=$ ₪ $2,700$.

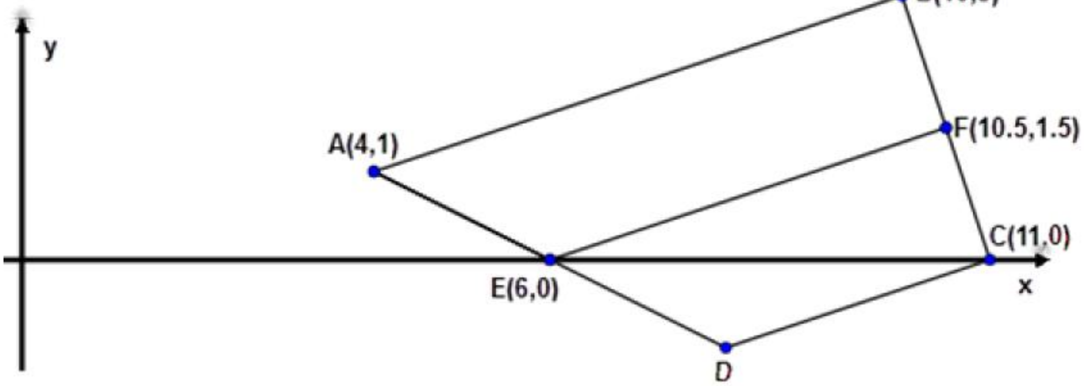
בסך הכול שילם משה $5,400$ ₪.

אם היה קונה לפני שינוי המחירים, היה משלם: $3\cdot 1000+2500=$ ₪ $5,500$.

לכן משה חסך 100 ₪ מתוך $5,500$ ₪, המהווים: $\frac{100}{5,500}=0.01818=1.818\%$.

תשובה: הסכום, ששילם משה עבור הקנייה שלו, קטן ב- 1.818% מהסכום שהיה משלם לפני שינוי המחירים.

א. שיפוע הצלע AB **, הוא** $m_{AB}=\frac{3-1}{10-4}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ **, ולכן שיפוע הצלע המאונכת (ההופכי והנגדי) הוא** $m_{BC}=-3$.



$$-3=\frac{3-0}{10-x_C} \quad /:3$$
$$-1=\frac{1}{10-x_C}$$
$$-10+x_C=1$$
$$x_C=11$$

תשובה: C(11,0) .

ב. נבדוק האם הקטע המחבר את E **לאמצע הצלע** BC **הוא קטע אמצעים בטרפז** ABCD .

$m_{AE}=\frac{1-0}{4-6}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$ **, ולכן** AD **לא מקביל ל-** BC **ו-** ABCD **טרפז (חישוב השיפוע נדרש גם לסעיף ג).**

$F(\frac{10+11}{2},\frac{3+0}{2})\rightarrow F(10.5,1.5)$.

$m_{EF}=\frac{1.5-0}{10.5-6}=\frac{1.5}{4.5}=\frac{1}{3}$ **ומכאן ש-** $EF \parallel AB$ **(השיפועים שווים).**

לכן, הקטע המחבר את E **לאמצע הצלע** BC **הוא קטע אמצעים בטרפז ו-** E **היא אמצע הצלע** AD .

תשובה: E **היא אמצע הצלע** AD .

ג. כפי שהראינו בסעיף ב, AD **לא מקביל ל-** BC **ולכן** $\measuredangle D$ **אינה ישרה.**

מכאן שהמיתר EC **לא נשען על זווית ישרה, במעגל החוסם את** ΔEDC **, והוא אינו קוטר במעגל זה.**

תשובה: EC **אינו קוטר במעגל החוסם את** ΔEDC .

א. בשקית א' יש 7 מטפחות צהובות ו- 5מטפחות אדומות,

לכן: $P(\text{yellow})=\frac{7}{12}, P(\text{red})=\frac{5}{12}$ **בהוצאת מטפחת אחת משקית א'.**

ההסתברות שהוציאו שתי מטפחות צהובות, אחת מכל שקית, היא: $\frac{7}{40}$ **.**

מכאן שאם p **היא ההסתברות להוצאת מטפחת אחת צהובה משקית ב', אז** $p=\frac{3}{10} \leftarrow \quad \frac{7}{12}\cdot p=\frac{7}{40}$ **,**

ובשקית ב' יש 3 מטפחות צהובות ו- 7 מטפחות אדומות.

תשובה: בשקית ב' יש 3 מטפחות צהובות.

ב. נחשב את ההסתברות שהמטפחת שהוצאה משקית ב' היא צהובה,

אם ידוע שהמטפחות שהוצאו הן בצבעים שונים.

$$P(\text{yellow from bag b /different colours})=\frac{P(\text{yellow from bag b}\cap\text{different colours})}{P(\text{different colours})}$$

$$P(\text{yellow from bag b /different colours})=\frac{\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{10}+\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{10}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{8}{15}}=\frac{15}{64}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{15}{64}$ **.**

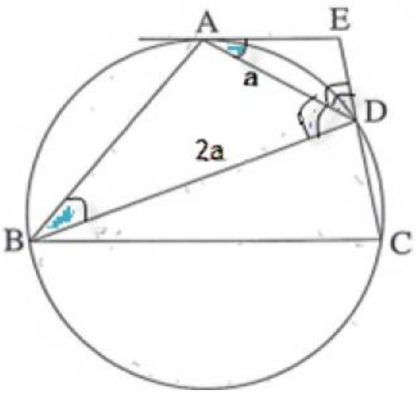
ג. עתה בוחרים באקראי שקית (הסתברות לכל שקית היא 0.5),

ומוציאים שתי מטפחות <u>ללא החזרה</u>, כך שמספר המטפחות יורד באחת, בהתאם לצבע המתאים.

$$P(2\text{ red})=0.5\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}+0.5\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{17}{55}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{17}{55}$ **.**

נכתב ע"י עפר ילין



נתונים

1. AB **משיק למעגל בנקודה** A.

2. $\sphericalangle ADB = \sphericalangle EDA$.

עבור ב: 3. $\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta AED}} = 4$

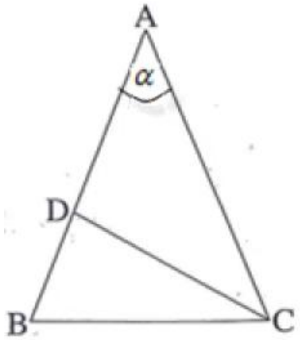
עבור ג: 4. $AD = a$

צ"ל: א. $\Delta BAD \sim \Delta AED$.

ב. $\frac{P_{\Delta BAD}}{P_{\Delta AED}}$.

ג. (1) BD **(2)** $\frac{BD}{DE}$

הסבר		טענה	נימוק
1	5	AB **משיק למעגל בנקודה** A	נתון
5	6	$\sphericalangle ABD = \sphericalangle EAD$ (ז)	זווית בין משיק למיתר
2	7	$\sphericalangle ADB = \sphericalangle EDA$ (ז)	נתון
6, 7	8	$\Delta BAD \sim \Delta AED$	משפט דמיון זווית זווית
מ.ש.ל. א			
3	9	$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta AED}} = 4$	נתון
8, 9	10	$2 = \frac{ED}{AD} = \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BA}$	יחס דמיון של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
8, 10	11	$\frac{P_{\Delta BAD}}{P_{\Delta AED}} = 2$	יחס היקפים של משולשים דומים שווה ליחס הדמיון
מ.ש.ל. ב			
4	12	$AD = a$	נתון
10, 12	13	$BD = 2a$ מ.ש.ל ג (1)	הצבה וחישוב
10, 12	14	$ED = \frac{1}{2}a$	הצבה וחישוב
13, 14	15	$\frac{BD}{DE} = 4$	חישוב
מ.ש.ל. ג (2)			



א. $\sphericalangle BAC = \sim$ **(נתון).**

$S_{\Delta ABC} =$ 12.5 **סמ"ר** **(נתון).**

$AB = AC$ **(נתון) .**

$$12.5 = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\sphericalangle BAC}{2}$$

$$12.5 = \frac{(AB)^2 \sin\sim}{2} \qquad / \cdot \frac{2}{\sin\sim} > 0$$

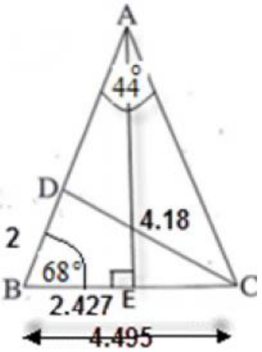
$$\frac{25}{\sin\sim} = (AB)^2$$

$$\boxed{AB = \frac{5}{\sqrt{\sin\sim}}} \quad \leftarrow AB > 0$$

תשובה: אורך השוק של המשולש ABC **הוא** $\frac{5}{\sqrt{\sin\sim}}$ **.**

ב. $AE \perp BC$ **(בניית עזר) ולכן** $BE = EC$ **(הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון).**

$\sim = 44^\circ$ **(נתון) ,** $BD =$ 2 **ס"מ .**



$$\sphericalangle B = \sphericalangle ACB = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ$$

$\underline{\Delta ABE}$

$$\cos 68^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$$\frac{5\cos 68^\circ}{\sqrt{\sin 44^\circ}} = BE$$

$$\boxed{BE = 2.247\,cm}$$

$$\boxed{BC = 4.495\,cm}$$

$\underline{\Delta BCD}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(DC)^2 = (BD)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot BD \cdot BC \cdot \cos\sphericalangle B$$

$$(DC)^2 = 2^2 + 4.495^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4.495 \cdot \cos 68^\circ$$

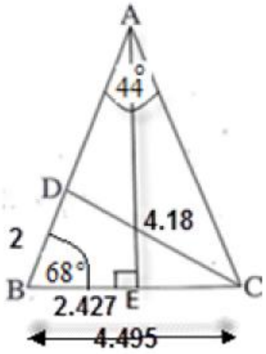
$$(DC)^2 = 17.47$$

$$\boxed{DC = 4.18\,cm}$$

תשובה: $DC =$ 4.18 **ס"מ** .

ג. כיוון ש- $DC > BD$ **, הרי שבמשפט הסינוסים, ב** ΔBCD , **נקבל פתרון יחיד אפשרי ל-** $\measuredangle BCD$ **.**

בתרגיל זה, אין כלל בעיה כי $\measuredangle BCD$ **חדה.**



$\underline{\Delta BCD}$ **לפי משפט הסינוסים:**

$$\frac{DC}{\sin 68°} = \frac{BD}{\sin\measuredangle BCD}$$

$$\sin\measuredangle BCD = \frac{2 \cdot \sin 68°}{4.18}$$

$$\sin\measuredangle BCD = 0.4437$$

$$\boxed{\measuredangle BCD = 26.34°} \quad \leftarrow 0° < \measuredangle BCD < 68°$$

תשובה: $\measuredangle BCD = 26.34°$ **.**

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2-x}$.

תחום ההגדרה, ביטוי במכנה שונה מאפס.

$$x^2-x\neq 0$$
$$x(x-1)\neq 0$$

תשובה: $x\neq 0,\ x\neq 1$.

(2) שש הצבות קצרות במחשבון, להתמצאות מיטבית בחקירה (מומלץ, לאחר מציאת תחום הגדרה).

$f(-100)=0.002\to 0,\quad f(100)=0.0002\to 0$, מסקנה: $y=0$ אסימפטוטה אופקית.

$f(-0.001)=1998\to +\infty,\quad f(0.001)=-2002\to -\infty$, מסקנה: $x=0$ אסימפטוטה אנכית.

$f(0.999)=-2002\to -\infty,\quad f(1.001)=1998\to +\infty$, מסקנה: $x=1$ אסימפטוטה אנכית.

נימוקים אפשריים נוספים:

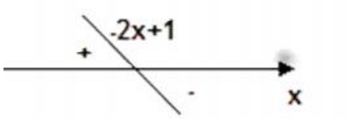
הביטוי $\frac{2}{x^2-x}$ שואף ל- 0, כאשר x שואף ל- $\pm\infty$, כי חזקת המכנה (2) גדולה מחזקת המונה (0),

$x=0,\quad x=1$ מאפסים מכנה ולא מונה, ולכן הישרים $x=0,\quad x=1$ אסימפטוטות אנכיות.

תשובה: $y=0$ אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y , $x=0,\quad x=1$ אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x .

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה.

$$f'(x)=\frac{0-2(2x-1)}{(x^2-x)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{2(-2x+1)}{(x^2-x)^2}}$$
$$2x-1=0$$
$$x=0.5$$

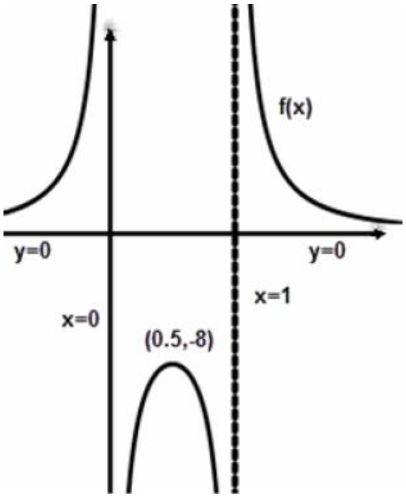


המכנה חיובי, כאשר המונה גרף של קו ישר יורד, העובר מחיוביות לשליליות, עבור $x=0.5$ ולכן מקסימום.

ומכאן גם שהפונקציה יורדת עבור $x>1$ או $0.5<x<1$ ועולה עבור $0<x<0.5$ או $x<0$.

תשובה: $(0.5,-8)$, מקסימום.

(4) הסרטוט המתאים:



ב. $g(x)=f(x)-2$ **תזוזה אנכית של** $f(x)$ **כלפי מטה ב-** 2 **יחידות.**

(1) תחום ההגדרה אינו משתנה והאסימפטוטות המאונכות לציר ה- x **אינן משתנות.**

התזוזה כלפי מטה ב- 2 **יחידות של גרף הפונקציה**

מורידה גם את האסימפטוטה האופקית ב- 2 **יחידות כלפי מטה.**

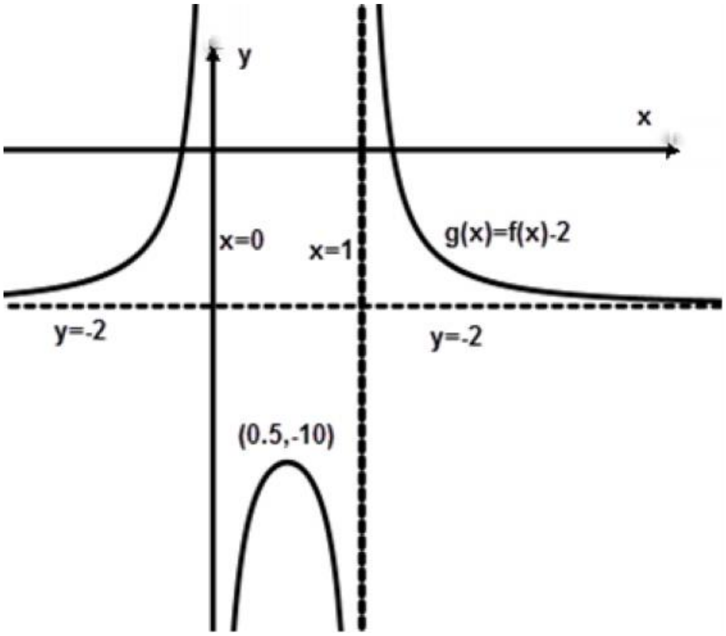
תשובה: $y=-2$ **אסימפטוטה מאונכת לציר ה-** y **,** $x=0,\quad x=1$ **אסימפטוטות מאונכות לציר ה-** x **.**

(2) התזוזה כלפי מטה ב- 2 **יחידות של גרף הפונקציה**

מורידה גם את נקודת הקיצון ב- 2 **יחידות כלפי מטה, אך *לא* את סוגה.**

תשובה: $(0.5,-10)$ **, מקסימום .**

(3) הסרטוט המתאים:



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+2$.

(1) הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי שלילי, והמכנה צ"ל שונה מאפס, לכן $x>0$.

תשובה: $x>0$.

(2) $x=0$ לא בתחום ההגדרה של הפונקציה, לכן אין חיתוך עם ציר ה- y .

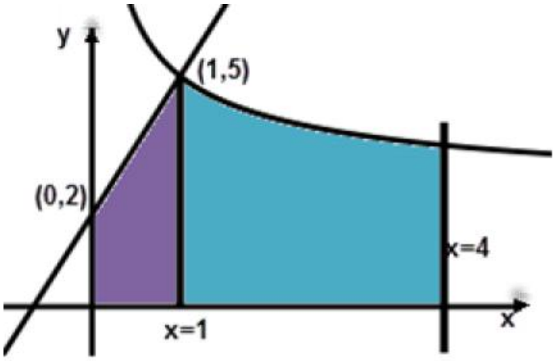
הביטוי $\frac{3}{\sqrt{x}}$ הוא חיובי ואם נוסיף 2 נקבל שהפונקציה חיובית לכל $x>0$, ואין חיתוך עם ציר ה- x .

למעשה $\frac{3}{\sqrt{x}}+2$ שואף ל- $0+2$, בכיוון החיובי של ציר ה- x , ולכן $y=2$ אסימפטוטה אופקית.

תשובה: גרף הפונקציה אינו חותך את הצירים.

(3) הסרטוט המתאים, כולל עבור ב (1).

הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+2$ יורדת (הובא כנתון).



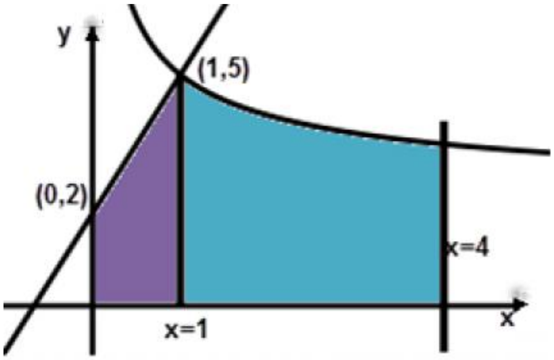
ב. (1) הסרטוט משמאל ובעמוד הקודם

(2) נמצא את נקודת החיתוך שבין הישר $y=3x+2$ לפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+2$.

$$\frac{3}{\sqrt{x}}+2=3x+2$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}}=3x \quad \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=x \quad (\ )^2$$

$$\frac{1}{x}=x^2 \quad \rightarrow \quad 1=x^3 \quad \rightarrow 1=x \quad \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}}=1 \quad \rightarrow 1=1\, o.k.$$



ושיעורי נקודת החיתוך הם: $(1,5)$ לפונקציה.

הישר $y=3x+2$ חותך את ציר ה- y בנקודה $(0,2)$ ועולה.

הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+2$ יורדת (הובא כנתון).

נחשב את השטח שבין הפונקציה, הצירים ושני הישרים,
על ידי חישוב שטח ימני בעזרת אינטגרל, ושמאלי כשטח טרפז.

$$S_{trapez}=\frac{(2+5)\cdot(1-0)}{2}=3.5$$.

את השטח הימני נחשב בעזרת אינטגרל.

$$S=\int_1^4\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+2-0\right)dx$$

$$S=3\cdot 2\sqrt{x}+2x\Big]_1^4$$

$$S=(6\cdot\sqrt{4}+2\cdot 4)-(6\cdot\sqrt{1}+2\cdot 1)$$

$$S=(20)-(8)$$

$$\boxed{S=12}$$

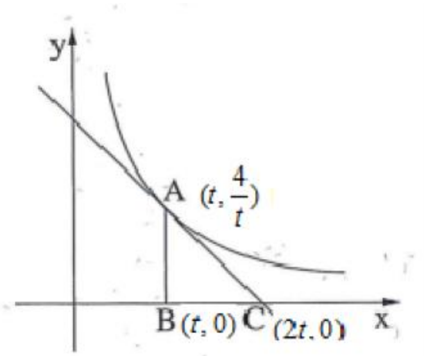
וגודל השטח כולו: $3.5+12=15.5$

תשובה: השטח הוא 15.5 יח"ר.

א. נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A , הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)=\frac{4}{x}$.

בהתאם שיעורי הנקודה הם $A(t,\frac{4}{t})$.

(1) נמצא את שיפוע המשיק בנקודה $A(t,\frac{4}{t})$.



$$\boxed{f'(x)=-\frac{4}{x^2}}$$

$$\boxed{m(t)=f'(t)=-\frac{4}{t^2}}$$

תשובה: שיפוע המשיק הוא $-\frac{4}{t^2}$.

(2) נמצא את משוואת המשיק בנקודה $A(t,\frac{4}{t})$.

$$y-\frac{4}{t}=-\frac{4}{t^2}(x-t)$$

$$y-\frac{4}{t}=-\frac{4}{t^2}x+\frac{4}{t}$$

$$\boxed{y=-\frac{4}{t^2}x+\frac{8}{t}}$$

תשובה: משוואת המשיק היא $y=-\frac{4}{t^2}x+\frac{8}{t}$.

(3) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x .

$$0=-\frac{4}{t^2}x+\frac{8}{t}\quad\rightarrow 0=-4x+8t\quad\rightarrow x=2t\quad\rightarrow C(2t,0)$$

שיעורי הנקודה B הם $(t,0)$, כי $x_B=x_A=t$.

לכן $BC=x_C-x_B=2t-t=t$

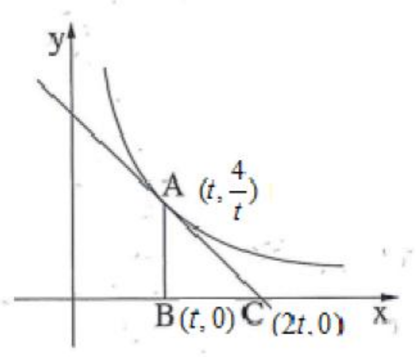
תשובה: $BC=t$.

ב. הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *סכום הקטעים* $\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$.

$$\mathrm{AB}=y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{B}}=\frac{4}{t}-0=\frac{4}{t}$$

כלומר: $\boxed{g(t)=t+\frac{4}{t}}$

נמצא את נקודת הקיצון



$$g'(t)=1-\frac{4}{t^2}$$

$$\boxed{g'(t)=\frac{t^2-4}{t^2}}$$

$$0=\frac{t^2-4}{t^2}$$

$$0=t^2-4 \quad \to t^2=4 \quad \to t=\pm 2$$

$t=-2$ נפסל כי נתון שהגרף ברביע הראשון.

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)

$$g'(1)=1^2-4=-3<0$$

$$g'(3)=3^2-4=5>0$$

x		2		0
y'	**+**		**-**	
מסקנה	↗	**Min**	↘	

הפונקציה עוברת מירידה לעלייה ולכן זו נקודת מינימום.

(בהתאם שיעורי הנקודה $\mathrm{A}(1,4)$)

תשובה: $t=2$ יביא את סכום הקטעים $\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ למינימום.