נסמן ב- x את הזמן (בשעות) הדרוש לראובן לחפור תעלה אחת לבדו,

וב- y את מספר השעות הנדרשות לשמעון.

פועל	זמן (שעות)	חלק עבודה בשעה (הספק)	חלק עבודה כולל (עבודה)
ראובן	x	$\frac{1}{x}$	1
שמעון	y	$\frac{1}{y}$	1
ראובן	12	$\frac{1}{x}$	$\frac{12}{x}$
שמעון	12	$\frac{1}{y}$	$\frac{12}{y}$
ראובן	$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{3}$
שמעון	$\frac{2}{3}y$	$\frac{1}{y}$	$\frac{2}{3}$

נפתור את מערכת המשוואות המתאימה לנתוני השאלה.

$$\begin{cases} \frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1 \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=23\frac{1}{3} \quad \rightarrow x+2y=70 \quad \rightarrow \boxed{x=70-2y} \end{cases}$$

$$\frac{12}{70-2y}+\frac{12}{y}=1 \quad / \cdot y(70-2y)$$

$$12y+12(70-2y)=y(70-2y)$$

$$2y^2-82y+840=0$$

$$y_{1,2}=\frac{82\pm 2}{4}$$

$$y=21 \quad \rightarrow x=28$$

$$y=20 \quad \rightarrow x=30$$

קיימות שתי אפשרויות: ראובן חופר תעלה אחת ב- 28 שעות, ושמעון ב- 21 שעות,

או ראובן חופר תעלה אחת ב- 30 שעות, ושמעון ב- 20 שעות.

יש למצוא כמה תעלות שלמות <u>לכל היותר</u> יחפור ראובן לבד <u>בפחות</u> מ- 100 שעות.

המספר המקסימלי של תעלות שראובן יכול לחפור, בזמן נתון, הוא כאשר הקצב שלו <u>מהיר</u> יותר,

כלומר כאשר חופר תעלה אחת ב- 28 שעות, ולכן $\frac{100}{28}=3.57$ - ומכאן שראובן יחפור 3 תעלות שלמות.

תשובה: ראובן יחפור 3 תעלות שלמות, לכל היותר.

א. יש להוכיח כי $\frac{a^n-1}{a-1}$ **שלם לכל** n **טבעי (**a **פרמטר טבעי ,** $a>1$ **)**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

נתון: $\frac{a^1-1}{a-1}=1$.

לכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{a^k-1}{a-1}$ **שלם**

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$ **, לכן צ"ל** $\frac{a^{k+1}-1}{a-1}$ **שלם.**

$$\frac{a^{k+1}-1}{a-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a\cdot a^k-1}{a-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a-1+1)\cdot a^k-1}{a-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)a^k+a^k-1}{a-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)a^k}{a-1}+\frac{a^k-1}{a-1}$$
$$\Leftrightarrow a^k+\frac{a^k-1}{a-1}$$

המחובר השמאלי שלם כי a **פרמטר טבעי ,** $a>1$ **ו-** k **טבעי.**

המחובר הימני שלם על פי הנחת האינדוקציה.

מתקבל שהוכחנו את נכונות הטענה עבור $n=k+1$

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

ב. נתון m **מספר טבעי, ויש למצוא** 3 **מספרים טבעיים (גדולים מ-** 1**) שהביטוי** 15^m-1 **מתחלק בהם *ללא* שארית.**

על פי סעיף א, עבור $a=15$ **, הביטוי** 15^m-1 **מתחלק ב-** $15-1=14$ ***ללא* שארית, ולכן גם ב-** 2 **או** 7 **.**

תשובה: שלושת המספרים הטבעיים הם 2 , 7 , 14 **.**

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2-\cos\frac{x}{2}$ **בתחום** $2® \le x \le 5®$ **.**

(1) נמצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ **.**

$$f'(x)=2x+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$f''(x)=2+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$$

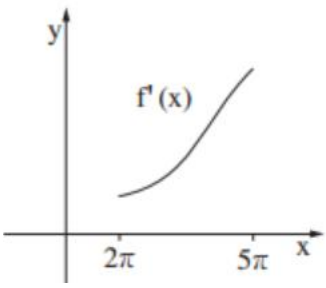
כיוון ש- $-1\le\cos\frac{x}{2}\le 1$ **, הרי ש** $-\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\le\frac{1}{4}$ **והנגזרת השנייה חיובית לכל** x **ובפרט בתחום.**

תשובה: $f'(x)$ **עולה בתחום** $2® < x < 5®$ **, יורדת לאף** x **.**

(2) $f'(2®)=2\cdot 2®+\frac{1}{2}\sin\frac{2®}{2}=4®=12.57>0$

כיוון ש- $f'(x)$ **עולה לכל** x **בתחום הרי ש** $(2®, 4®+0.5)$ **מינימום מוחלט וכל ערכי** $f'(x)$ **חיוביים.**

תשובה: הוכַח.



באדיבות אתר משרד החינוך

(3) משמאל הציור המבוקש. כיוון שהציור נעשה על ידי מחשב,
ניתן לראות נקודת פיתול, אולם לא התבקשנו למצאה,
וכל סקיצה שמראה עלייה היא אפשרית (למעט כמובן קו ישר).

(4) $f'(5®)=2\cdot 5®+\frac{1}{2}\sin\frac{5®}{2}=10®+0.5=31.92$

31.92 **הוא הערך המקסימלי של פונקציית הנגזרת, לכן אין פתרונות למשוואה** $f'(x)=40$

תשובה: אין פתרונות לפי הנימוק לעיל.

ב. (1) הראינו בסעיף א כי $f''(x)=2+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$ **חיובית, בתחום** $2® \le x \le 5®$ **.**

הערך המקסימלי של $\cos\frac{x}{2}$ **הוא** 1 **ומתקבל עבור** $x=4®k$ **, לכן בתחום הנתון עבור** $x=4®$

ובהתאם הערך המקסימלי של $f''(x)$ **הוא** 2.25 **.**

הערה – עבור $x=4®$ $f''(x)$ **עוברת מעלייה לירידה, ולכן זה שיעור ה-** x **של נקודת פיתול של**
פונקציית הנגזרת $f'(x)$ **שבאה לידי ביטוי בגרף הממוחשב שהבאנו בתת-סעיף א (3).**

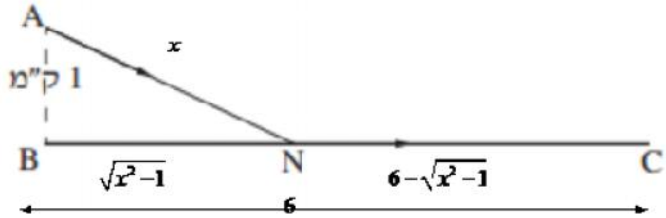
תשובה: הערך המקסימלי של $f''(x)$ **הוא** 2.25 **.**

(2) בסעיפים הקודמים הראינו כי בתחום הנתון: הערך המינימלי של $f'(x)$ **הוא** 12.57**,**
והערך המקסימלי של $f''(x)$ **הוא** 2.25**. מכאן שגרף** $f'(x)$ **נמצא מעל גרף** $f''(x)$ **בכל התחום הנתון,**
לכן השטח שבין הגרפים של שתי פונקציות אלו שווה לערך של האינטגרל המסוים

$$\int_{2®}^{5®}(f'(x)-f''(x))\,dx$$

תשובה: כן, לפי הנימוק לעיל.

נסמן ב- x את המרחק שעובר דני בשדה (ק"מ).



הפונקציה שיש להביא למינימום **היא** זמן ההליכה.

זמן ההליכה בשדה (בקטע AN), במהירות v קמ"ש הוא $\frac{x}{v}$.

על ידי משפט פיתגורס (ΔBAN ישר זווית) נקבל $BN=\sqrt{x^2-1}$.

אורך הקטע BC הוא 6 ק"מ, לכן $NC=6-\sqrt{x^2-1}$.

זמן ההליכה בכביש (בקטע NC), במהירות $\frac{13}{12}v$ קמ"ש הוא $\frac{12(6-\sqrt{x^2-1})}{13v}$.

פונקציית הזמן היא

$$f(x)=\frac{x}{v}+\frac{12(6-\sqrt{x^2-1})}{13v}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{13v}\cdot(13x+72-12\sqrt{x^2-1})}$$

$$f'(x)=\frac{1}{13v}\cdot(13-\frac{12\cdot 2x}{2\sqrt{x^2-1}})$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{13v}\cdot\frac{13\sqrt{x^2-1}-12x}{\sqrt{x^2-1}}}$$

$$0=13\sqrt{x^2-1}-12x \quad \rightarrow 12x=13\sqrt{x^2-1} \quad (\ )^2$$

$$144x^2=169(x^2-1) \quad \rightarrow 144x^2=169x^2-169$$

$$x^2=\frac{169}{25} \quad \rightarrow \boxed{x=2.6} \quad \leftarrow x>1$$

$$0=13\sqrt{2.6^2-1}-12\cdot 2.6 \quad \rightarrow 0=0 \quad o.k.$$

בדיקת סוג הקיצון על ידי ערכי פונקציית הזמן ($v>0$ פרמטר):

$f(2)=\frac{1}{13v}\cdot 77.21,\ f(2.6)=\frac{1}{13v}\cdot 77,\ f(3)=\frac{1}{13v}\cdot 77.06$ **ולכן $x=2.6$ מינימום.**

המרחק שדני עבר הוא: $x+6-\sqrt{x^2-1}=2.6+6-\sqrt{2.6^2-1}=6.2km$

תשובה: אורך המסלול ANC , שדני עבר בזמן מינימלי, הוא 6.2 ק"מ.

א. $\sphericalangle BCD=\sim$ **(נתון)**

$ABCD$ **טרפז שווה שוקיים, לכן זוויות הבסיס שוות ו-** $\sphericalangle ODC=\sim$ **.**

CB **משיק ב-** F **לכן הוא מאונך לרדיוס ו-** $\sphericalangle OFC=90°$ **(הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה).**

$\sphericalangle BOD=270°-2\sim$ **(סכום זוויות במרובע** $CFOD$ **הוא** $360°$ **)**

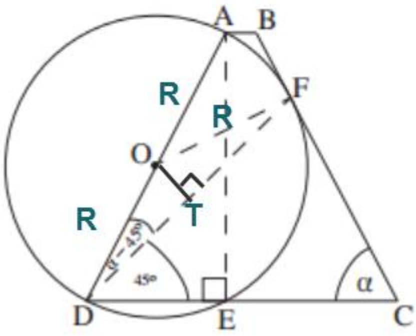
תשובה: $\sphericalangle BOD=270°-2\sim$ **.**

ב. (1) $OF=OD=R$ **(רדיוסים שווים במעגל, וסימון).**

$$\sphericalangle ODF=\frac{180-(270-2\sim)}{2}=\sim-45°$$ **(זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים)**

תשובה: $\sphericalangle ODF=\sim-45°$

(2) יש למצוא את היחס $\frac{DE}{DC}$ **.**



הציור באדיבות אתר משרד החינוך

<u>תכנון</u>: נסמן את רדיוס המעגל ב- R **.**

נביע באמצעות R **ו-** $\sim$ **את** DE **ב-** ΔADE **ישר הזווית**

($\sphericalangle AED=90°$ **כי היא נשענת על הקוטר** AD **).**

לאחר מכן נבנה את $OT\perp DF$ **ולכן** $DT=FT$

(קטע היוצא ממרכז המעגל למיתר ומאונך לו חוצה אותו).

נביע את DF **באמצעות** R **ו-** $\sim$ **ולאחר מכן את** DC **ב-** DFC

$\sphericalangle FDC=\sim-(\sim-45°)=45°$ **(הפרש זוויות).**

נמצא את DE **ב-** ΔADE | **נמצא את** DT **ב-** ΔODT

$\cos\sim=\frac{DE}{AD}$, $\boxed{DE=2R\cos\sim}$

$\cos(\sim-45°)=\frac{DT}{OD}$, $\boxed{DT=R\cos(\sim-45°)}$ **ולכן** $\boxed{DF=2R\cos(\sim-45°)}$

נמצא את DC **ב-** ΔDFC **באמצעות משפט הסינוסים**

$$\frac{DC}{\sin(180°-(\sim+45°))}=\frac{DF}{\sin\sim}$$

$$\boxed{DC=\frac{2R\cos(\sim-45°)\sin(\sim+45°)}{\sin\sim}}$$

$$\frac{DE}{DC}=\frac{2R\cos\sim\ \sin\sim}{2R\cos(\sim-45°)\sin(\sim+45°)}=\frac{\sin 2\sim}{2\cos(-(\sim-45°))\cos(90°-(\sim+45°))}=\frac{\sin 2\sim}{2\cos(45°-\sim)\cos(45°-\sim)}$$

$$\boxed{\frac{DE}{DC}=\frac{\sin 2\sim}{2\cos^2(45°-\sim)}}$$

תשובה: $\frac{DE}{DC}=\frac{\sin 2\sim}{2\cos^2(45°-\sim)}$ **(או** $\frac{\cos\sim\ \sin\sim}{\cos(\sim-45°)\sin(\sim+45°)}$ **, או** $\frac{\sin 2\sim}{2\cos(\sim-45°)\sin(\sim+45°)}$

או $\frac{\sin 2\sim}{2\sin^2(45°+\sim)}$ **)**