א. יש למצוא את יחס המהירויות בין הרוכבים, נסמן אותו ב- p

(היחס בין מהירות האופנוע למהירות אופניים הוא $P:1$).

עד הפגישה, כאשר נסעו את אותו הזמן, עבר רוכב האופנוע מרחק הגדול פי p מהמרחק שעבר רוכב האופניים.

ולכן לאחר הפגישה עבר מרחק הקטן פי p מהמרחק שעבר רוכב האופניים,

בזמן הקטן פי 16 מזמנו של רוכב האופניים ($\frac{1}{16}=\frac{0.25}{4}$).

לכן יחס המהירויות הוא $\sqrt{16}=4$. $(P=\frac{S_1/t_1}{S_2/t_2} \rightarrow P=\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{t_2}{t_1} \rightarrow P=\frac{1}{P}\cdot 16 \rightarrow P^2=16)$ **.**

תשובה: היחס בין מהירות רוכב האופנוע למהירות רוכב האופניים הוא 4 .

ב. נתון כי המרחק בין A ל- B גדול מ- 90 קמ"ש.

כיוון שיחס המהירויות הוא $4:1$, הרי שלרוכב האופנוע נותר לעבור $\frac{1}{5}$ מהדרך ברבע שעה,

כלומר יותר מ- $90:5=18$ ק"מ ברבע שעה ובהתאם מהירותו גדולה מ- 72 קמ"ש.

על פי היחס ביניהם, מהירות רוכב האופניים גדולה מ- 18 קמ"ש.

כמו כן, קיים חסם עליון של 120 קמ"ש למהירות רוכב האופנוע, ובהתאם 30 קמ"ש למהירות רוכב האופניים.

תשובה: מהירות רוכב האופנוע גדולה מ- 72 קמ"ש וקטנה או שווה ל- 120 קמ"ש.

מהירות רוכב האופניים גדולה מ- 18 קמ"ש וקטנה או שווה ל- 30 קמ"ש.

נתונה הסדרה $...a_1, a_2, a_3, ..., a_n...$, כאשר $a_n = n!\cdot n$. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ..., +a_n$

א. 1. נבדוק עבור $n=1$:

$a_2 = 2!\cdot 2 = 4$ אגף ימין > אגף שמאל $S_1 = a_1 = 1!\cdot 1 = 1$

לכן, הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $S_k < a_{k+1}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, לכן צ"ל

$$S_{k+1} < a_{k+2}$$
$$\Leftrightarrow \underset{\downarrow}{\underline{S_k}} + a_{k+1} < a_{k+2}$$
$$\Leftrightarrow a_{k+1} + a_{k+1} \le a_{k+2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי הגדול ממנו,

לכן, די אם נוכיח אי-שוויון חלש (כולל סימן השוויון)

$$\Leftrightarrow 2a_{k+1} \le a_{k+2}$$
$$\Leftrightarrow 2(k+1)!(k+1) \le (k+2)!(k+2)$$
$$\Leftrightarrow 2(k+1)!(k+1) \le (k+1)!(k+2)(k+2)$$

$(k+1)! = (k+1)!$, $k+1 < k+2$, וגם $2 < k+2$ לכל k טבעי

מתקבל שאגף שמאל קטן מאגף ימין.

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי,

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. יש להוכיח כי $S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{10} < S_{11} - a_1$

על פי סעיף א, עבור $n = 1,2,3,...,10$ נקבל: $S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{10} < a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{11}$, ולכן:

$$S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{10} < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{11} - a_1$$
$$S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{10} < S_{11} - a_1$$

תשובה: הוכַח.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^3(3x-®)$ **בתחום** $0\le x\le \frac{2®}{3}$.

$$f(x)=\cos^3(3x-®)=\cos^3(®-3x)=-\cos^3 3x$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, כלומר** $f(0)=-\cos^3(3\cdot 0)=-1 \ \rightarrow \boxed{(0,-1)}$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **,**

$$0=-\cos^3 3x \quad \rightarrow \cos 3x=0 \quad \rightarrow 3x=\frac{®}{2}+®k \quad \rightarrow x=\frac{®}{6}+\frac{®}{3}k$$

עבור $k=0$ **נקבל** $x=\frac{®}{6}$ **, ועבור** $k=1$ **נקבל** $x=\frac{®}{2}$ **.**

תשובה: $(0,-1)$ **,** $(\frac{®}{6},0)$ **,** $(\frac{®}{2},0)$ **.**

ב. נמצא תחילה את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור, ולאחר מכן נקודות קיצון פנימיות:

$$\boxed{(0,-1)},\quad f(\frac{2®}{3})=-\cos^3(3\cdot\frac{2®}{3})=-1 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{2®}{3},-1)}$$

$$\boxed{f'(x)=9\cos^2 3x\sin 3x}$$

$$0=9\cos^2 3x\sin 3x$$

$$\sin 3x=0 \qquad\qquad \cos 3x=0 \quad \rightarrow (\frac{®}{6},0),(\frac{®}{2},0) \quad \textit{have been proved}$$

$$3x=®k \quad x=\frac{®}{3}k$$

$$k=1 \quad \rightarrow x=\frac{®}{3} \quad \rightarrow f(\frac{®}{3})=-\cos^3(3\cdot\frac{®}{3})=1 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{®}{3},1)}$$

$$k=0,2 \quad \rightarrow x=0,\ x=\frac{2®}{3}\text{ end points}$$

נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה,

כאשר $(\frac{®}{6},0),(\frac{®}{2},0)$ **מתגלות כנקודות פיתול ולא קיצון.**

0		$\frac{®}{6}$		$\frac{®}{3}$		$\frac{®}{2}$		$\frac{2®}{3}$	x
-1		0		1		0		-1	$f(x)$
				0					$f'(x)$
Min	↗	**פיתול**	↗	**Max**	↘	**פיתול**	↘	**Min**	**מסקנה**

תשובה: $(0,-1)$ **,** $(\frac{2®}{3},-1)$ **מינימום ,** $(\frac{®}{3},1)$ **, מקסימום.**

ב. (1) נוכיח כי הפונקציה זוגית

$$f(x) = -\cos^3 3x$$
$$f(-x) = -\cos^3(3(-x)) = -\cos^3(-3x) = -\cos^3 3x$$
$$f(-x) = f(x)$$

תשובה: הוכַח.

(2) פונקציה זוגית סימטרית לציר ה- y **.**

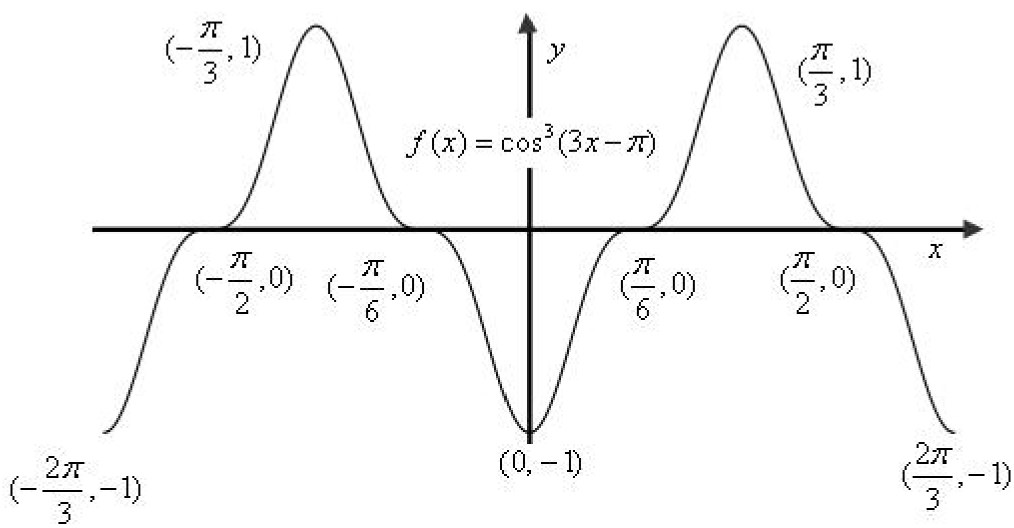
בהתאם:

$(-\frac{\pi}{6},0)$ **,** $(-\frac{\pi}{2},0)$ **נוספות כנקודות חיתוך עם ציר ה-** x **וכנקודות פיתול.**

$(-\frac{2\pi}{3},-1)$ **מינימום ,** $(-\frac{\pi}{3},1)$ **, מקסימום נוספות כנקודות קיצון,**

$(0,-1)$ **נשארת מינימום, אך כנקודת קיצון פנימית.**

הסקיצה המתאימה:



ג. משוואות המשיק בנקודות קיצון פנימיות הן של פונקציות קבועות, כי השיפוע 0 **.**

בנקודת המינימום $(0,-1)$ **, משוואת המשיק היא** $y=-1$ **.**

(בנקודות המינימום של הקצה, הנגזרת אינה מוגדרת ולכן *לא* קיים משיק).

בנקודות המקסימום $(\frac{\pi}{3},1)$ **ו-** $(-\frac{\pi}{3},1)$ **משוואת המשיק היא** $y=1$ **.**

בנקודות הפיתול $(\frac{\pi}{2},0),(\frac{\pi}{6},0),(-\frac{\pi}{6},0),(-\frac{\pi}{2},0)$ **, שהתגלו, בהן שיפוע המשיק הוא** 0 **,**

משוואת המשיק היא $y=0$ **.**

תשובה: $y=-1$ **,** $y=1$ **,** $y=0$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{bx+1}{\sqrt{x^2-a}}$

הישר $x=3$ **הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה,**

לכן $x=3$ **מאפס את המכנה ומכאן ש** $3^2-a=0$**, ובהתאם** $a=9$**.**

הישר $y=1$ **הוא אסימפטוטה אופקית לגרף הפונקציה,**

לכן $1=\dfrac{bx}{|x|}$ **ומכאן שערכי** b **בערכם המוחלט הם** 1**, ומכיוון שנתון כי** b **חיובי הרי ש** $b=1$**.**

תשובה: $a=9$ **,** $b=1$**.**

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}$

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ- 0 **.**

$x^2-9>0$ **, נקבל פרבולה בעלת מינימום שמתאפסת עבור** $x=-3,3$

תשובה: תחום ההגדרה: $x>3$ **או** $x<-3$.

(2) אין נקודות חיתוך עם ציר y **כי** $x=0$ **אינו בתחום ההגדרה.**

בנקודת החיתוך עם ציר x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל** $x=-1$ **שגם לא בתחום ההגדרה.**

תשובה: אין נקודות חיתוך עם הצירים.

(3) נמצא אסימפטוטות המקבילות לצירים:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{1}\quad\to\boxed{y=1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{-1}\quad\to\boxed{y=-1}$$

$$\lim_{x\to3^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to3^+}\frac{4}{0^+}=+\infty\quad\to\boxed{x=3}$$

$$\lim_{x\to-3^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to-3^-}\frac{-2}{0^+}=-\infty\quad\to\boxed{x=-3}$$

תשובה: אסימפטוטות אופקיות:$y=1$**,** $y=-1$ **, אסימפטוטות אנכיות:** $x=3$, $x=-3$

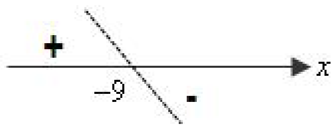
(4) נמצא תחומי עלייה וירידה

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}-\frac{\not{2}x(x+1)}{\not{2}\sqrt{x^2-9}}}{x^2-9}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-9-x^2-x}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-9-x}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}}}$$



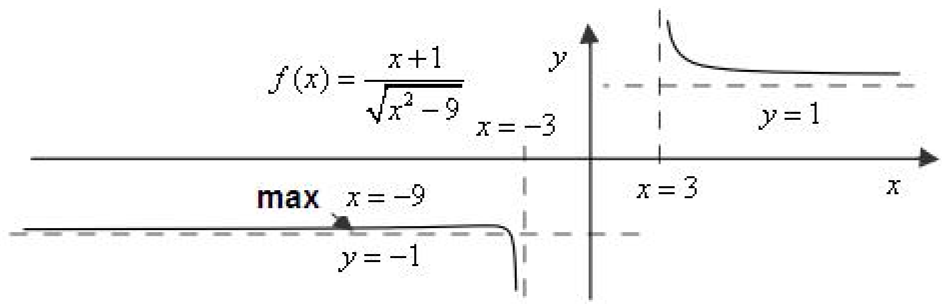
סימן הנגזרת נקבע על ידי הביטוי במונה, שהוא קו ישר יורד, ומקבל ערך 0 **עבור** $x=-9$ **.**

ובהתאם הנגזרת חיובית עבור $x<-9$ **ושלילית עבור** $-9<x<-3$ **או** $x>3$

תשובה: ירידה: $x>3$ **או** $-9<x<-3$ **, עלייה:** $x<-9$ **.**

ג. נשים לב שהפונקציה חיובית עבור $x>3$ **ושלילית עבור** $x<-3$ **.**

ובהתאם הסקיצה המתאימה.



ד. יש למצוא את סימן האינטגרל המסוים $\int_k^t (f'(x)\,dx$ **, כאשר** $3<k<t$

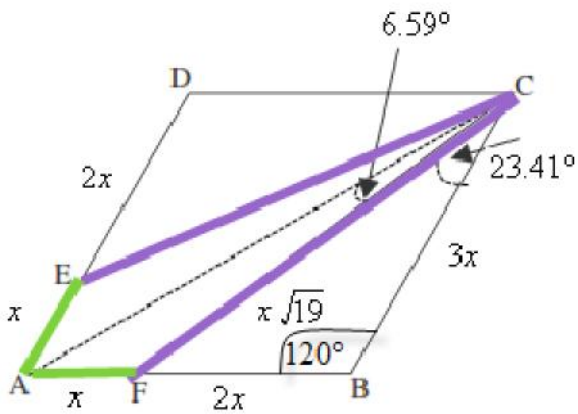
$$\int_k^t (f'(x)\,dx = f(x)\Big]_k^t = f(t)-f(k)$$

כיוון שהפונקציה יורדת, בתחום $x>3$ **ו-** $3<k<t$ **,**

הרי ש- $f(t)<f(k)$ **ולכן** $f(t)-f(k)<0$ **.**

תשובה: סימן האינטגרל המסוים הוא שלילי.

א. במעוין כל הצלעות שוות, וזוויות נגדיות שוות.



$AE = AF = x$ **(נתון וסימון)**

$FB = 2AF = 2x$ **(נתון וחישוב)**

$AB = 3x$ **(סכום קטעים) ולכן כל צלעות המעוין שוות** $3x$

$DE = 2x$ **(הפרש קטעים)**

$\sphericalangle DCB = 60°$ **(נתון)**

$\sphericalangle FBC = 120°$ **(זוויות סמוכות במעוין משלימות ל-** $180°$**)**

$\underline{\Delta FCB}$ **לפי משפט הקוסינוסים** $120°$

$$(CF)^2 = (FB)^2 + (BC)^2 - 2FB \cdot BC \cdot \cos\sphericalangle FBC$$
$$(CF)^2 = (2x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \cos 120°$$
$$(CF)^2 = 19x^2$$
$$\boxed{CF = x\sqrt{19}}$$

$\underline{\Delta FCB}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{FB}{\sin\sphericalangle FCB} = \frac{FC}{\sin\sphericalangle FBC} \rightarrow \frac{2x}{\sin\sphericalangle FCB} = \frac{x\sqrt{19}}{\sin 120°}$$
$$\frac{2x\sin 120°}{x\sqrt{19}} = \sin\sphericalangle FCB$$
$$\boxed{\sphericalangle FCB = 23.41°}$$

תשובה: $\sphericalangle FCB = 23.41°$ **.**

ב. נתון כי אורך האלכסון AC **הוא** b**.**

$\sphericalangle ACB = 30°$ **(אלכסוני המעוין חוצים זוויות)**

$\sphericalangle ACF = 6.59°$ **(הפרש זוויות)**

$\sphericalangle CAF = 30°$ **(זוויות נגדיות שוות במעוין ואלכסון חוצה זווית במעוין)**

$\sphericalangle AFC = 143.41°$ **(סכום זוויות** ΔACF **הוא** $180°$ **)**

$\underline{\Delta ACF}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{FC}{\sin\sphericalangle CAF} = \frac{AC}{\sin\sphericalangle AFC} \rightarrow \frac{x\sqrt{19}}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 143.41°}$$
$$x\sqrt{19} = 0.8388b \rightarrow \boxed{FC = 0.8388b}$$
$$x = 0.1924b \rightarrow \boxed{AF = 0.1924b}$$

$\Delta FCB \cong \Delta ECD$ **(משפט חפיפה צלע זווית צלע) ולכן מרובע** $AECF$ **הוא דלתון.**

נחשב את היקף מרובע $AECF$ **:** $2 \cdot 0.8388b + 2 \cdot 0.1924b = 2.0624b$

תשובה: היקף מרובע $AECF$ **הוא** $2.0624b$ **ס"מ.**