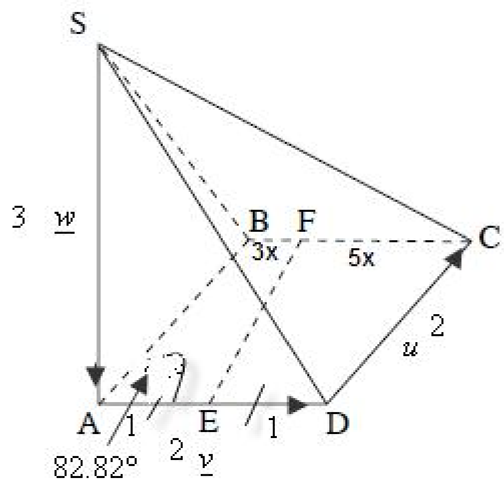



**א. נמצא את נפח הפירמידה** SABCD **.**

**בסיס הפירמידה מעוין, שכל צלעותיו שוות זו לזו.**

**על פי נתוני התרגיל וכפי שיוכח בהמשך:**

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}\quad |\underline{u}|=2\quad \underline{u}^2=4$

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}\quad |\underline{v}|=2\quad \underline{v}^2=4$

$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}}\quad |\underline{w}|=3\quad \underline{w}^2=9$

$$\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0,\quad \underline{u}\cdot\underline{v}=\frac{1}{2}$$

**הנקודה** F **מחלקת את הצלע** BC **,**

**ביחס של** $BF:FC=3:5$ **, לכן:**

$$\overrightarrow{BF}=\frac{3}{8}\overrightarrow{BC}\quad\rightarrow\boxed{\overrightarrow{BF}=\frac{3}{8}\underline{v}}$$

**הנקודה** E **היא אמצע הצלע** AD **ולכן :**

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\underline{v}}$$

$\overrightarrow{SA}$ **מאונך למישור הבסיס, לכן:** $\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$

$\overrightarrow{SD}\perp\overrightarrow{EF}$ **, ובהתאם:** $\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{EF}=0$

$$\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}\quad\rightarrow\boxed{\overrightarrow{SD}=\underline{w}+\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$$

$$\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{u}+\frac{3}{8}\underline{v}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EF}=\underline{u}-\frac{1}{8}\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{EF}=0$$

$$(\underline{u}-\frac{1}{8}\underline{v})(\underline{w}+\underline{v})=0$$

$$\underline{u}\underline{v}-\frac{1}{8}\underline{v}^2=0 \quad \leftarrow \underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$$

$$\boxed{\underline{u}\underline{v}=\frac{1}{2}} \quad \leftarrow \underline{v}^2=4$$

$$\underline{u}\underline{v}=|\underline{u}||\underline{v}|\cos\sphericalangle BAD$$

$$\frac{1}{2}=2\cdot 2\cos\sphericalangle BAD$$

$$\cos\sphericalangle BAD=\frac{1}{8} \quad \rightarrow \boxed{\sphericalangle BAD=82.82^\circ}$$

**שטח בסיס הפירמידה** SABCD :

$$S_{ABCD}=|\underline{u}||\underline{v}|\sin\sphericalangle BAD$$

$$S_{ABCD}=2\cdot 2\sin 82.82^\circ$$

$$\boxed{S_{ABCD}=3.97}$$

**נפח הפירמידה** SABCD:

$$V_{SABCD}=\frac{S_{ABCD}\cdot|\underline{w}|}{3}$$

$$V_{SABCD}=\frac{3.97\cdot 3}{3}$$

$$\boxed{V_{SABCD}=3.97}$$

**תשובה: נפח הפירמידה** SABCD **הוא** 3.97 **יח"ק.**

**ב. (1) נמצא את נפח הפירמידה המשולשת** SEDC.

**כיוון שהנקודה** E **היא אמצע הצלע** AD **, הרי ש:** $S_{EDC}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$

SA **הוא גובה משותף לפירמידה** SEDC **ולפירמידה** SABCD.

$$V_{SEDC}=\frac{1}{4}V_{SABCD}$$

$$V_{SEDC}=\frac{3.97}{4}$$

$$\boxed{V_{SEDC}=0.992}$$

**תשובה: נפח הפירמידה המשולשת** SEDC 0.992 **יח"ק.**

**(2) מרחק הקדקוד** C **מהמישור , הוא אורך הגובה מקדקוד** C **למישור המשולש** SED **בפירמידה** SEDC.

**הראינו כי נפח הפירמידה המשולשת** SEDC 0.992 **יח"ק.**

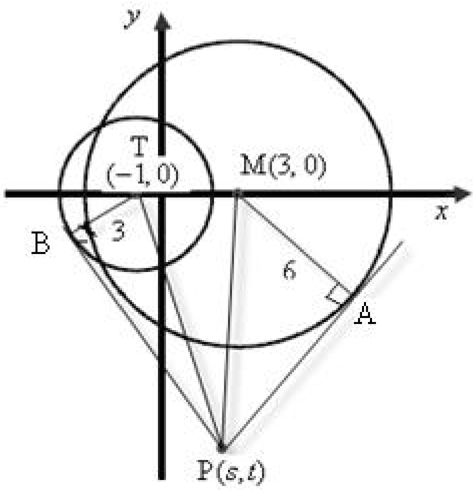
**שטח בסיס הפירמידה** SAD **:** $S_{SED} = \frac{|\underline{w}||\overrightarrow{ED}|}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1.5$

$$0.992 = \frac{1.5h_C}{3}$$

$$\boxed{1.984 = h_C}$$

**תשובה: מרחק הקדקוד** C **מהמישור** SED **הוא** 1.984**.**

**א. נמצא את מרכזי המעגלים ואת הרדיוסים.**




$$x^2+y^2-6x-27-0$$
$$(x-3)^2+y^2-27=9$$
$$(x-3)^2+y^2=36 \quad \rightarrow \mathrm{M}(3,\,0),\, R=6$$
$$x^2+y^2+2x-8=0$$
$$(x+1^2+y^2-8=1$$
$$(x+1)^2+y^2=9 \quad \rightarrow \mathrm{T}(-1,\,0),\, R=3$$

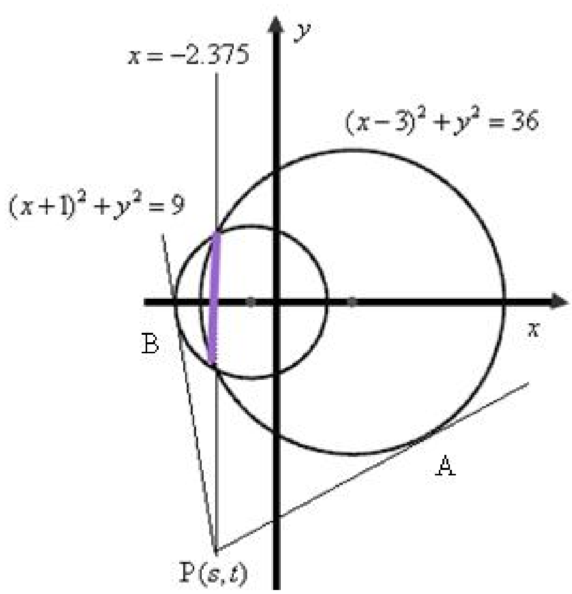
**נסמן** $\mathrm{P}(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי,**

**כאשר** $\mathrm{AB},\,\mathrm{BP}$ **משיקים למעגלים.**

**על פי הנתון** $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ **.**

**כיוון שרדיוס המעגל מאונך למשיק בנקודת ההשקה,**

**הרי שעל פי משפט פיתגורס:**




$$\sqrt{(s-3)^2+(t-0)^2-6^2}=\sqrt{(s+1)^2+(t-0)^2-3^2}$$
$$s^2-6s+9+t^2-36=s^2+2s+1+t^2-9$$
$$-8s=19$$
$$s=-2.375$$
$$\boxed{x=-2.375}$$

**נשים לב שכיוון שהעלינו בריבוע את שני אגפי המשוואה,**

**ייתכן ונכנסו פתרונות זרים.**

**נשים לב שהישר** $x=-2.375$ **הוא המיתר המשותף לשני המעגליב**

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I.} & x^2+y^2-6x-27=0\\ \text{II.} & x^2+y^2+2x-8=0\end{array}\right\} -8x-19=0 \quad \rightarrow x=-2.375$$

**תשובה: המקום הגיאומטרי מונח על הישר** $x=-2.375$ **.**

**ב. נבדוק עבור אילו ערכי** $y$ **הנקודות** $(-2.375, y)$ **נמצאות על המיתר המשותף.**

**כלומר, עבור** $-2.666\le y\le 2.666$ **הקטע על הישר** $x=2.375$ **נמצא בתוך המעגל הימני.**

$$(-2.375-3)^2+y^2=36$$
$$y^2=7.109$$

**כלומר, עבור** $-2.666\le y\le 2.666$ **הקטע על הישר** $x=2.375$ **הוא המיתר המשותף,**

**ואורכו** $2\cdot 2.666=5.333$ **.**

**תשובה: אורך הקטע** $5.333$ **יח'.**

**א.** $z_1$ **ו-** $z_2$ **הם שורשי המשוואה** $z+\frac{1}{z}=1$ **. נסמן** $z=a+bi$ **.**

$$z+\frac{1}{z}=1 \quad \to z^2+1=z$$
$$z^2-z+1=0$$
$$z_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$
$$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \leftarrow 1st \quad quadrant$$
$$z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$z_1$ **,** $z_2$ **ו-** $z_3$ **הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית, שבה** $z_1$ **הוא האיבר הראשון,**

**לכן** $d=-\sqrt{3}\,i$ **ובהתאם:** $z_3=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$ **.**

$r=\left|\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{7}>1$ **ו-** $z_3$ **מחוץ למעגל היחידה** $x^2+y^2=1$

**תשובה:** $z_3$ **מחוץ למעגל היחידה.**

**ב. נתונה המשוואה** $z^2+az+b=0$ **שפתרונותיה הם מספרים מרוכבים (*לא ממשיים*).**

**(1) נוכיח שאם** $a$ **ו-** $b$ **הם מספרים ממשיים, אז פתרונות המשוואה הם מספרים צמודים.**

**על פי נוסחאות ויאטה:** $z_1\cdot z_2=b,\quad z_1+z_2=-a$

**נסמן:** $(y,t\neq 0)\quad z_1=x+yi,\quad z_2=s+ti$

$$x+yi+s+ti=-a \quad \to I:\quad y+t=0 \quad \to \boxed{y=-t}$$
$$(x+yi)\cdot(s+ti)=b \quad \to xs+xti+syi-yt=b \quad \to I:\quad xt+sy=0$$
$$xt-st=0 \quad \to \boxed{x=s}$$

**ולכן פתרונות המשוואה הם מספרים צמודים.**

**תשובה: הוכַח.**

**(2)** $z_3=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$ **הוא אחד מפתרונות המשוואה הנתונה בסעיף ב.**

**על פי סעיף (1) הפתרון השני הוא :** $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i=-a \quad a=-1$$

$$(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i)(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i)=b \quad \rightarrow b=\frac{1}{4}+\frac{27}{4}=7$$

**תשובה:** $a=-1$ **,** $b=7$**.**

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ **,** $a>0$ **, המוגדרת לכל** $x$ **.**

$$f(-x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{-x}{a}}+e^{-\frac{-x}{a}})=\frac{a}{2}(e^{-\frac{x}{a}}+e^{\frac{x}{a}})=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})=f(x)$$

**תשובה: הפונקציה זוגית.**

**ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון:**

$$f'(x)=\frac{a}{2}(\frac{1}{a}\cdot e^{\frac{x}{a}}-\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{x}{a}})$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})}$$

$$0=e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\quad\rightarrow e^{\frac{x}{a}}=e^{-\frac{x}{a}}\quad\rightarrow\frac{x}{a}=\frac{x}{a}$$

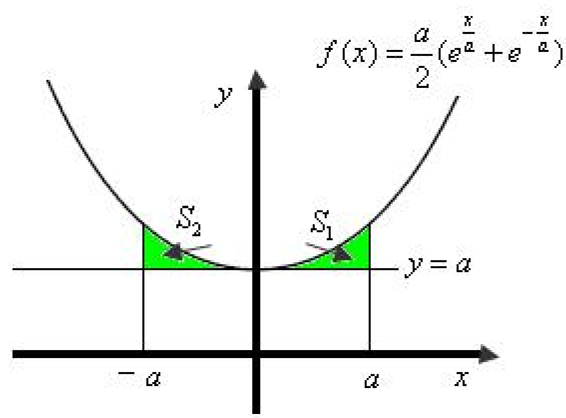
$$x=0\quad\rightarrow f(0)=\frac{a}{2}(e^{\frac{0}{a}}+e^{-\frac{0}{a}})=a\quad\rightarrow\boxed{(0,a)}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{1}{2a}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})>0}$$

**הנגזרת השנייה קעורה כלפי מעלה לכל** $x$ **ובהתאם** $(0,a)$ **נקודת מינימום.**

**תשובה:** $(0,a)$ **נקודת מינימום.**

**ג. סרטוט הסקיצה של גרף הפונקציה (כולל סימונים עבור סעיפים ד-ה).**



**ד. עקב זוגיות הפונקציה שני השטחים המסתובבים זהים בגודלם.**

**משוואת המשיק בנקודת המינימום היא** $y=a$

$$V_1=®\int_0^a(\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}))^2dx-®\int_0^a a^2dx$$

$$V_1=®\int_0^a\frac{a^2}{4}(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})dx-®\int_0^a a^2\ dx$$

$$V_1=®\ \frac{a^2}{4}(\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{\frac{-2x}{a}})-®a^2x\Big]_0^a$$

$$V_1=®((\frac{a^2}{4}(\frac{a}{2}e^{\frac{2a}{a}}+2a-\frac{a}{2}e^{\frac{-2a}{a}})-\frac{a^2}{4}(\frac{a}{2}e^{\frac{2\cdot0}{a}}+2\cdot0-\frac{a}{2}e^{\frac{-2\cdot0}{a}}))-(a^2\cdot a-0))$$

$$V_1=®((\frac{a^3}{8}e^2+\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2}-a^3)$$

$$V_1=®((\frac{a^3}{8}e^2-\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2})$$

**ולכן הנפח הכולל הוא** $2®(\frac{a^3}{8}e^2-\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2})$.

**על פי הנתון:** $2®(\frac{a^3}{8}e^2-\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2})=2®(e^2-e^{-2}-4)$

$$2®(\frac{a^3}{8}e^2-\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2})=2®(e^2-e^{-2}-4)\quad /:2®$$

$$\frac{a^3}{8}e^2-\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2}=e^2-e^{-2}-4$$

$$\frac{a^3}{8}(e^2-4-e^{-2})=e^2-e^{-2}-4\quad /:e^2-e^{-2}-4\neq0$$

$$\frac{a^3}{8}=1$$

$$a^3=8$$

$$\boxed{a=2}$$

**תשובה:** $a=2$

**ה. נתונה הפונקציה** $g(x)=\frac{b}{2}(e^{\frac{x}{b}}+e^{-\frac{x}{b}})$ **,** $b<0$.

**עקב זוגיות הפונקציה, והעובדה כי נפח גוף הסיבוב שנוצר הוא חצי מנפח גוף הסיבוב שבסעיף ד,**
**הרי ש-** $b=-a=-2$ **, כי למעשה השטח המסתובב הפעם הוא רק השטח השמאלי מהסקיצה הקודמת.**
**תשובה:** $b=-2$.

נבדוק האם הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{\ell og(\frac{x}{4})}{\ell og(x-3)}-2$ חותך את ציר ה- $x$ .

כלומר האם יש פתרון למשוואה $\frac{\ell og(\frac{x}{4})}{\ell og(x-3)}-2=0$

$x=4$ מאפס את מכנה הפונקציה, כאשר $x>3$ מבטיח ארגומנטים חיוביים לפונקצית ה- $\ell og$

תחום ההגדרה: $x>3, x\neq 4$ .

$$\frac{\ell og(\frac{x}{4})}{\ell og(x-3)}-2=0$$

$$\frac{\ell og(\frac{x}{4})}{\ell og(x-3)}=2$$

$$\ell og(\frac{x}{4})=2\ell og(x-3)$$

$$\ell og(\frac{x}{4})=\ell og(x-3)^2 \quad \leftarrow b\ell\,\mathrm{og}_a x=\ell\,\mathrm{og}_a x^b$$

$$\frac{x}{4}=(x-3)^2$$

$$\frac{x}{4}=x^2-6x+9$$

$$x=4x^2-24x+36$$

$$4x^2-25x+36=0$$

$$x_{1,2}=\frac{25\pm 7}{8}$$

~~$x=4$~~ ~~$x=2.25$~~

שני הפתרונות לא בתחום ההגדרה.

תשובה: הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{\ell og(\frac{x}{4})}{\ell og(x-3)}-2$ <u>אינו</u> חותך את ציר ה- $x$ .

**נתונה הפונקציה** $f(x)=\ell og_a(\sin 2x)+b$ **בתחום** $\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{5\pi}{12}$ **,** $a>1$ **.**

**בתחום הנתון,** $\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{5\pi}{12}$ **, מוגדרת פונקציית ה-** $\sin$ **וחיובית ולכן הביטוי** $\ell og_a(\sin 2x)+b$ **מוגדר בתחום.**

**בתחום הנתון הערך הקטן ביותר של הפונקציה הוא** $0$ **, והערך הגדול ביותר הוא** $1$.

**בהתאם נחפש מינימום ומקסימום מוחלטים בקטע הסגור.**

**ערכי נקודות הקצה:**

$$\ell og_a(\sin 2\cdot\frac{\pi}{12})+b=b+\ell og_a 0.5$$

$$\ell og_a(\sin 2\cdot\frac{5\pi}{12})+b=b+\ell og_a 0.5$$

$f(x)=\ell og_b(\sin 2x)+b$ **- כיוון ש** $a>1$ **הרי ש-** $f(x)$ **עולה כאשר** $\sin 2x$ **עולה ויורדת כאשר** $\sin 2x$ **יורדת.**

$\sin 2x$ **מקבלת ערך מקסימלי** $1$ **בתחום עבור** $x=\frac{\pi}{4}$ **, כי אז** $\sin 2x=\sin\frac{\pi}{2}=1$**.**

**לכן מקסימום מוחלט של** $f(x)=\ell og_b(\sin 2x)+b$ **הוא** $\ell og_b(\sin 2\cdot\frac{\pi}{4})+b=\ell og_b 1+b=b$

**נתון כי הערך הגדול ביותר הוא** $1$**, לכן** $\boxed{b=1}$.

**נתון כי הערך הקטן ביותר של הפונקציה הוא** $0$**, ובמקרה זה הוא מתקבל בקצות תחום ההגדרה הנתון.**

**לכן:**

$$0=1+\ell og_a 0.5$$

$$\ell og_a 0.5=-1$$

$$a^{-1}=0.5$$

$$a^{-1}=2^{-1}$$

$$\boxed{a=2}$$

**תשובה:** $a=2$ **,** $b=1$