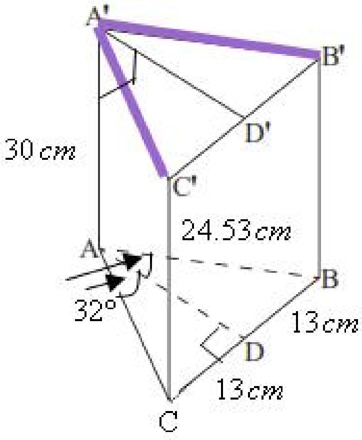
א. כיוון שבסיס המנסרה הוא משולש שווה שוקיים, $AC = AB$,

הרי ש- AD **, הגובה לבסיס, הוא גם תיכון לבסיס וגם חוצה זווית הראש.**

$$CD = BD = \frac{26}{2} = 13\,cm$$

$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB = \frac{64°}{2} = 32°$$



$\underline{ACD}$

$$\tan 32° = \frac{CD}{AD}$$

$$AD = \frac{13}{\tan 32°}$$

$$\boxed{AD = 20.80\,cm}$$

שטח הבסיס: $S = \dfrac{BC \cdot AD}{2} = \dfrac{26 \cdot 20.80}{2} = 270.46\,cm^2$.

נתון כי נפח המנסרה שווה 8112 **סמ"ק.**

$$8112 = 270.46 \cdot H \quad \rightarrow H = 29.99 \approx 30\,cm$$

תשובה: גובה המנסרה הוא 30 **ס"מ.**

ב. הזווית בין $A'B$ **למישור הבסיס** ABC , **היא** $\sphericalangle A'BA$ **שבין** $A'B$ **(המשופע) לבין ההיטל שלו לבסיס** ABC ,

ומתקבלת במשולש ישר הזווית $A'AB$ $(\sphericalangle A'AB = 90°)$.

$\underline{ABD}$

$$\sin 32° = \frac{BD}{AB}$$

$$AB = \frac{13}{\sin 32°}$$

$$\boxed{AB = 24.53\,cm}$$

$\underline{A'AB}$

$$\tan \sphericalangle A'BA = \frac{AA'}{AB}$$

$$\tan \sphericalangle A'BA = \frac{30}{24.53}$$

$$\boxed{\sphericalangle A'CA = 50.73°}$$

תשובה: הזווית בין $A'B$ **למישור הבסיס** ABC **היא בת** $50.73°$.

ב. הזווית $A'AD'$ **מתקבלת במשולש ישר הזווית** $AA'D'$ $(\sphericalangle AA'D' = 90°)$.

$\underline{AA'D'}$

$$\tan \sphericalangle A'AD' = \frac{A'D'}{AA'}$$

$$\tan \sphericalangle A'AD' = \frac{20.80}{30}$$

$$\boxed{\sphericalangle A'AD' = 34.73°}$$

תשובה: הזווית $A'AD'$ **היא בת** $34.73°$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=0.5x-0.5\cos(2x)+0.5$ **והישר** $y=0.5x$.

(1) נמצא את שיעורי ה- של הנקודות המשותפות שלהם בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

$$0.5x=0.5x-0.5\cos(2x)+0.5$$
$$0.5\cos 2x=0.5$$
$$\cos 2x=1$$
$$2x=2\pi k$$
$$x=\pi k$$

עבור $k=0,1,-1$ **נקבל** $x=0,\pi,-\pi$

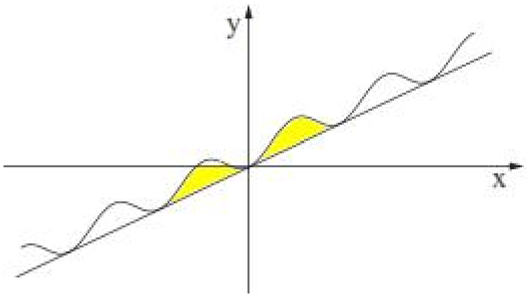
תשובה: $x=0,\pi,-\pi$.

ב. נמצא האם הנגזרות שוות בנקודות אלו, כלומר שיפוע הפונקציה שווה לשיפוע הישר שהוא 0.5 .

$$\boxed{f'(x)=0.5+\sin 2x}$$
$$f'(0)=0.5+\sin(2\cdot 0)=0.5 \quad o.k.$$
$$f'(\pi)=0.5+\sin(2\cdot\pi)=0.5 \quad o.k.$$
$$f'(-\pi)=0.5+\sin(2\cdot(-\pi))=0.5 \quad o.k.$$

תשובה: הישר משיק לפונקציה בנקודות אלו.

ג. בכל התחום $-\pi \le x \le \pi$ **גרף הפונקציה אינו מתחת למשיק:**



נחשב את גודל השטח (הצהוב).

$$S=\int_{-\pi}^{\pi}(0.5x-0.5\cos(2x)+0.5-0.5x)\,dx$$
$$S=\int_{-\pi}^{\pi}(-0.5\cos(2x)+0.5)\,dx$$
$$S=(-\frac{\sin 2x}{4}+0.5x)\Big]_{-\pi}^{\pi}$$
$$S=(-\frac{\sin 2\pi}{4}+0.5\pi)-(-\frac{\sin(2(-\pi))}{4}+0.5(-\pi))$$
$$S=0.5\pi+0.5\pi$$
$$\boxed{S=\pi}$$

תשובה: גודל השטח הוא π.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{x^2-x}$, $a>0$ פרמטר.

מכנה הפונקציה מתאפס עבור $x(x-1)=0 \quad \to x=0,1$.

תשובה: $x\neq 0,\ x\neq 1$.

ב. $x=0$ מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר $x=0$ מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה,

$x=1$ מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר $x=1$ מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.

תשובה: אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x : $x=0$, $x=1$.

ג. כיוון ש- $a>0$ הרי שמונה הפונקציה אינו מתאפס ואין נקודת חיתוך עם ציר ה- x .

תשובה: הוכַח.

ד. נמצא את נקודת הקיצון של הפונקציה ואת סוגה.

$$f'(x)=\frac{-a(2x-1)}{(x^2-x)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{a(1-2x)}{(x^2-x)^2}}$$

$$0=1-2x \quad \to x=0.5$$

$$f(0.5)=\frac{a}{0.5^2-0.5}=-4a \quad \to (0.5,-4a)$$

הביטוי היחידי שמשפיע על סימן נגזרת הפונקציה הוא $1-2x$ (שאר הגורמים במונה חיוביים).

זהו קו ישר יורד, העובר מחיוביות לשליליות, עבור $x=0.5$,

ובהתאם לתחום ההגדרה נקבל את תחומי העלייה והירידה:

עלייה : $x<0$ או $0<x<0.5$. ירידה: $0.5<x<1$ או $x>1$. לכן: $(0.5,-4a)$ מקסימום.

תשובה: $(0.5,-4a)$ מקסימום.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2x^2e^{-\frac{x^2}{m}}$ **(** m **פרמטר שונה מ-** 0 **)**

תשובה: הפונקציה מוגדרת לכל x **.**

ב. לפונקציה נקודת קיצון ב- $x=-2$ **, לכן בנקודה זו הנגזרת מתאפסת.**

$$f'(x)=4xe^{-\frac{x^2}{m}}+2x^2e^{-\frac{x^2}{m}}(-\frac{2x}{m})=\underbrace{2e^{-\frac{x^2}{m}}}_{>0}(2x-x^2\cdot\frac{2x}{m})$$

$$0=2\cdot(-2)-(-2)^2\cdot\frac{2\cdot(-2)}{m}$$

$$0=-4+\frac{16}{m}\quad\to 0=-4m+16\quad\to\boxed{m=4}$$

תשובה: $m=4$ **.**

נציב $m=4$ **ולכן** $f(x)=2x^2e^{-\frac{x^2}{4}}$ **(ניתן לראות שזו פונקציה זוגית** $f(-x)=f(x)$ **ואי-שלילית).**

ג. (1) בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ומתקבל** $2x^2=0$ **ובהתאם** $(0,0)$

זו כמובן גם נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y **.**

תשובה: $(0,0)$ **.**

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן :

$$f'(x)=4xe^{-\frac{x^2}{4}}+2x^2e^{-\frac{x^2}{4}}(-\frac{2x}{4})$$

$$\boxed{f'(x)=\underbrace{2e^{-\frac{x^2}{4}}}_{>0}(2x-0.5x^3)}$$

$$0=x(2-0.5x^2)\quad\to x=0\quad\to(0,0)$$

$$2-0.5x^2=0\quad\to x^2=4\quad\to x=\pm2$$

$$x=2\quad\to f(2)=2\cdot2^2e^{-\frac{2^2}{4}}\quad\to\boxed{(2,\frac{8}{e})}\quad\to\boxed{(-2,\frac{8}{e})}$$

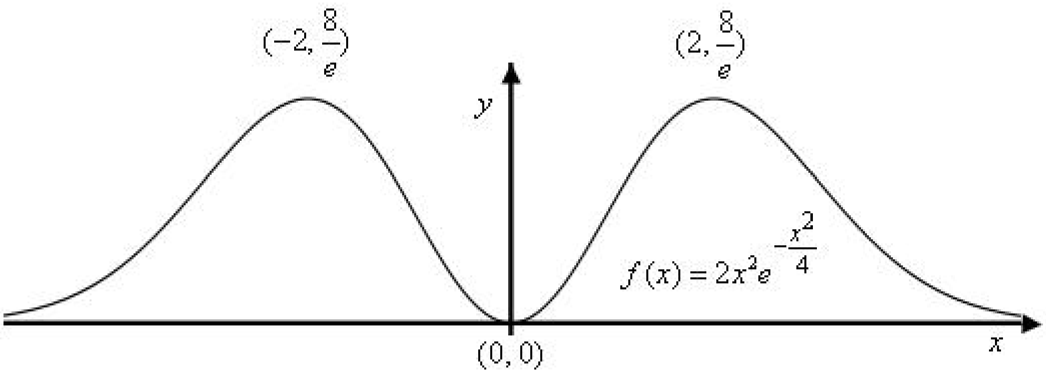
נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה ($\underbrace{2e^{-\frac{x^2}{m}}}_{>0}$ **חיובי)**

$$f'(-3)=2\cdot(-3)-0.5(-3)^3>0,\quad f'(-1)<0,\quad f'(1)>0,\quad f'(3)<0$$

x		2		0		-2	
y'	**-**	0		0	**-**	0	**+**
מסקנה	↘	**Max**	↗	**Min**	↘	**Max**	↗

תשובה: $(2,\frac{8}{e})$, $(-2,\frac{8}{e})$ **מקסימום ,** $(0,0)$ **מינימום.**

(3) הסקיצה המתאימה

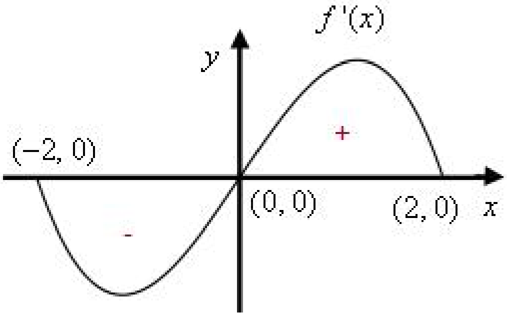


ד. על פי טבלת עלייה/ ירידה, או הגרף של $f(x)$ **, ניתן לראות ש-** $f'(x)>0$ **עבור** $0<x<2$ **או** $x<0$ **,**

ו- - $f'(x)<0$ **עבור** $x>2$ **או** $-2<x<0$ **.**

התחום המבוקש הוא $-2\le x\le 2$ **, כאשר בקצוות** $f'(x)=0$ **.**

בהנחה, שלפונקצית הנגזרת אין יותר משתי נקודות קיצון פנימיות, להלן סקיצה אפשרית:



5א

נתונה הפונקציה $f(x)=-x\ell n(2x)$.

שטח המלבן שווה למכפלת האורך ברוחב, כלומר $\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}$.

C היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x, לכן $f(x)=0$

$$0=-x\ell n(2x)$$
$$x=0 \quad \rightarrow x_{\mathrm{O}}=0$$
$$\ell n(2x)=0 \quad \rightarrow 2x=e^{0}=1 \quad \rightarrow x_{\mathrm{C}}=0.5$$

ובהתאם: $\mathrm{OC}=0.5-0=0.5$.

הצלע AB משיקה לפונקציה בנקודת המקסימום שלה,

שעל פי הציור עבור $0<x<0.5$.

$$f'(x)=-\ell n(2x)-x\cdot\frac{2}{2x}$$
$$\boxed{f'(x)=-\ell n(2x)-1}$$
$$0=-\ell n(2x)-1$$
$$\ell n(2x)=-1$$
$$2x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$
$$x=\frac{1}{2e} \quad \rightarrow f\left(\frac{1}{2e}\right)=-\frac{1}{2e}\cdot\ell n\left(2\cdot\frac{1}{2e}\right)=\frac{1}{2e}$$

ולכן משוואת הצלע AB היא $y=\frac{1}{2e}$, ו- $\mathrm{OA}=\frac{1}{2e}-0=\frac{1}{2e}$

נחשב את השטח: $\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}=0.5\cdot\frac{1}{2e}=\frac{1}{4e}$

תשובה: שטח המלבן הוא $\frac{1}{4e}$.

5ב

נוסחת הגידול והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$ **, כאשר** M_0 **- הכמות ההתחלתית**
q **הוא גורם הגידול,** M_t **הכמות לאחר זמן** t **.**

בעוד 10 **שנים תרד הכמות ב-** 20% **מהכמות שיש לחוקר כיום, כלומר תגיע ל-** 80% **מהכמות כיום.**
כלומר הכמות תרד מ- M_0 **ל-** $0.6M_0$ **ב-** 10 **שנים.**

$$0.8M_0 = M_0 \cdot q^{10} \quad / : M_0$$
$$0.8 = q^{10}$$
$$q = \sqrt[10]{0.8}$$
$$\boxed{q = 0.9779}$$

נמצא כעבור כמה שנים , החל מהיום, תרד הכמות ב- 40% **מהכמות שיש לחוקר כיום,**
כלומר תגיע ל- 60% **מהכמות כיום.**

$$0.6M_0 = M_0 \cdot 0.9779^t \quad / : M_0$$
$$0.6 = 0.9779^t$$
$$\ell n\, 0.6 = \ell n\, 0.9779^t$$
$$\ell n\, 0.6 = t \ell n\, 0.9779$$
$$\frac{\ell n\, 0.6}{\ell n\, 0.9779} = t$$
$$\boxed{t = 22.89}$$

תשובה בעוד 22.89 **שנים .**