א. נסמן $P(s,t)$, נקודה על המקום הגיאומטרי.

EC **מקביל לציר ה-** x **, ולכן** $y_E = y_C$ **.**

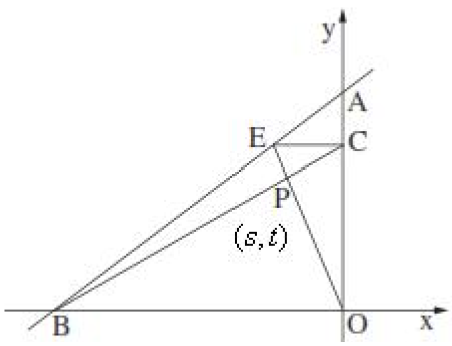
נמצא שתי משוואות המבוססות על שיפועי הישרים העוברים דרך E **.**

$$\frac{y_E - 0}{x_E - 0} = \frac{t-0}{s-0} \quad \to (1) \quad \frac{y_E}{x_E} = \frac{t}{s}$$

$$\frac{y_C - 0}{0+8} = \frac{t-0}{s+8} \quad \to (2) \quad \frac{y_E}{8} = \frac{t}{s+8}$$

$$\to \frac{(1)}{(2)} \quad \frac{8}{x_E} = \frac{s+8}{s}$$

$$x_E = \frac{8s}{s+8} \quad \to y_E = \frac{t}{s} \cdot \frac{8s}{s+8} = \frac{8t}{s+8} \quad \to E(\frac{8s}{s+8}, \frac{8t}{s+8})$$



נמצא את משוואת הישר AB **ונציב בה את שיעורי הנקודה** E **.**

$$m_{AB} = \frac{6-0}{0+8} = \frac{3}{4} \quad \to y = \frac{3}{4}x + 6$$

$$\frac{8t}{s+8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8s}{s+8} + 6$$

$$\frac{8t}{s+8} = \frac{6s}{s+8} + 6$$

$$8t = 6s + 6s + 48$$

$$8t = 12s + 48$$

$$t = 1.5s + 6$$

$$\boxed{y = 1.5x + 6}$$

המקום הגיאומטרי הוא הישר $y = 1.5x + 6$ **עבור** $-8 < x < 0$ **, כי** E **על הקטע** AB **ולא מתלכדת עם הקצוות,**

אך, על פי ניסוח השאלה יש להראות שהמקום הגיאומטרי מונח על הישר והוא אכן מונח על הישר $y = 1.5x + 6$ **.**

תשובה: המקום הגיאומטרי מונח על הישר $y = 1.5x + 6$ **.**

ב. E **היא מרכז המעגל החוסם את המשולש** ABO **, שהוא ישר זווית, ולכן היא אמצע היתר ושיעוריה** $(-4, 3)$ **.**

נמצא את שיעור ה- x **של הנקודה** P_0 **, באמצעות שיעורי הנקודה** $E(\frac{8s}{s+8}, \frac{8t}{s+8})$ **.**

$$-4 = \frac{8s}{s+8}$$

$$-4s - 32 = 8s$$

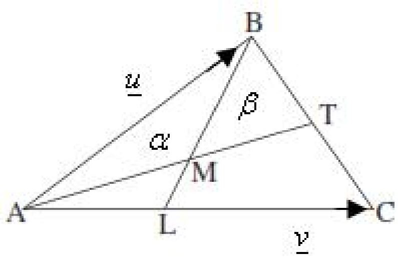
$$s = -\frac{8}{3} \quad \to x_{P_0} = -\frac{8}{3}$$

שטח המשולש AP_0O **שווה -** $\frac{AO \cdot (-x_{P_0})}{2} = \frac{6 \cdot \frac{8}{3}}{2} = 8$

א. נמצא את הערך של ~ ושל   בעזרת יחידות ההצגה,

כאשר נבטא את הווקטור $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ בדרך חלופית

ונשווה את המקדמים של $\underline{u}$ ל- 1 ושל ל- 0.



$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{u}}$

$\boxed{\overrightarrow{AC} = \underline{v}}$

$\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\boxed{\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}}$

$\overrightarrow{AM} = \sim \overrightarrow{AT}$

$\boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\sim\underline{u} + \frac{1}{2}\sim\underline{v}}$

$\frac{AL}{LC} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow AL = \frac{3}{7}AC$

$\boxed{\overrightarrow{AL} = \frac{3}{7}\underline{v}}$

$\overrightarrow{BM} = \quad \overrightarrow{BL}$

$\overrightarrow{BM} = \quad (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL})$

$\boxed{\overrightarrow{BM} = \quad (-\underline{u} + \frac{3}{7}\underline{v})}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

$\boxed{\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\sim\underline{u} + \frac{1}{2}\sim\underline{v} + \quad \underline{u} - \frac{3}{7} \quad \underline{v}}$

$(1) \quad \frac{1}{2}\sim + \quad = 1$

$(2) \quad \frac{1}{2}\sim - \frac{3}{7} \quad = 0$

$(1)-(2) \quad \boxed{\quad = 0.7} \quad \rightarrow \boxed{\sim = 0.6}$

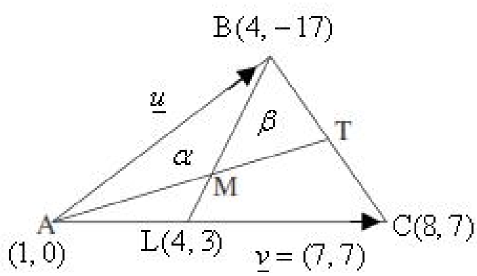
תשובה: $\sim = 0.6$, $\quad = 0.7$.

ב. נתון: $AT=\sqrt{50}$, $\underline{v}=(7,7)$, $A(1,0)$.

(1) נסמן $B(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי**

$$\overrightarrow{AC}=\underline{C}-\underline{A}$$
$$\underline{(7,7)}=\underline{C}-\underline{(1,0)}$$
$$\boxed{C(8,7)}$$
$$BT=TC \quad \rightarrow T(\frac{s+8}{2},\frac{t+7}{2})$$
$$AT=\sqrt{50} \quad \rightarrow \sqrt{(\frac{s+8}{2}-1)^2+(\frac{t+7}{2}-0)^2}$$
$$50=(\frac{s+6}{2})^2+(\frac{t+7}{2})^2$$
$$\boxed{200=(x+6)^2+(y+7)^2}$$

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא $(x+6)^2+(y+7)^2=200$.



(2) נשתמש בנתוני הסעיפים הקודמים, כמוסבר בשאלה.

$$\overrightarrow{AL}=\frac{3}{7}\underline{v}=\frac{3}{7}\cdot\underline{(7,7)}=\underline{(3,3)}$$
$$\overrightarrow{AL}=\underline{L}-\underline{A}$$
$$\underline{(3,3)}=\underline{L}-\underline{(1,0)}$$
$$\boxed{L(4,3)}$$

תשובה: $L(4,3)$.

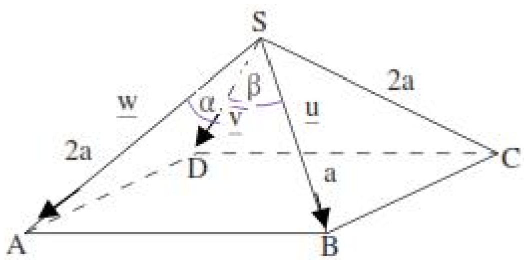
(3) MB **מקביל לציר ה-** y **, לכן** $x_B=x_M=x_L=4$.

$$(4+6)^2+(y+7)^2=200$$
$$(y+7)^2=100$$
$$y+7=10 \quad \rightarrow y=3 \quad \textit{not valid}, y_B\neq y_L$$
$$y+7=-10 \quad \rightarrow y=-17$$
$$\boxed{B(4,-17)}$$

תשובה: $B(4,-17)$.

3א

(1)



$\boxed{\overrightarrow{SB} = \underline{u}} \quad |\underline{u}| = a \quad \underline{u}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{SD} = \underline{v}} \quad |\underline{v}| = a \quad \underline{v}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{SA} = \underline{w}} \quad |\underline{w}| = 2a \quad \underline{w}^2 = 4a^2$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \quad \underline{v} \cdot \underline{w} = 2a^2 \cos\sim \quad \underline{u} \cdot \underline{w} = 2a^2 \cos$

$\boxed{\overrightarrow{DC} = -\underline{w} + \underline{u}}$

$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}$

$\boxed{\overrightarrow{SC} = \underline{v} - \underline{w} + \underline{u}}$

תשובה: $\overrightarrow{SC} = \underline{v} - \underline{w} + \underline{u}$

(2) ננתח את משמעות הנתונים החדשים.

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \quad \underline{v} \cdot \underline{w} = 2a^2 \cos\sim \quad \underline{u} \cdot \underline{w} = 2a^2 \cos$

$SD = SB \quad \rightarrow |\underline{v}| = |\underline{u}| = a$

$\sphericalangle DSB = 90° \quad \rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

$\sphericalangle ASD = \sim \quad \rightarrow \underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}||\underline{w}| \cos\sim = 2a^2 \cos\sim$

$\sphericalangle ASB = \quad \rightarrow \underline{u} \cdot \underline{w} = |\underline{u}||\underline{w}| \cos \quad = 2a^2 \cos$

$SC = SA \quad \rightarrow |\overrightarrow{SC}| = |\overrightarrow{SA}|$

$\sqrt{\underline{u}^2 + \underline{v}^2 + \underline{w}^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} - 2\underline{u} \cdot \underline{w} - 2\underline{v} \cdot \underline{w}} = |\underline{w}|$

$a^2 + a^2 + 4a^2 - 0 - 4a^2 \cos \quad - 4a^2 \cos\sim = 4a^2 \quad / a^2 > 0$

$2 - 4\cos \quad - 4\cos\sim = 0$

$\boxed{\cos\sim + \cos \quad = \frac{1}{2}}$

תשובה: הוכַח.

(1) נפתור את המשוואה z המקיימים $|z|i+2z=\sqrt{3}$.

נסמן $z=a+bi$

$$|z|i+2z=\sqrt{3}$$
$$|a+bi|i+2(a+bi)=\sqrt{3}$$
$$\sqrt{a^2+b^2}\,i+2a+2bi=\sqrt{3}$$
$$R\quad 2a=\sqrt{3}\quad \rightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$I\quad \sqrt{\frac{3}{4}+b^2}+2b=0$$
$$\sqrt{\frac{3}{4}+b^2}=-2b$$
$$\frac{3}{4}+b^2=4b^2$$
$$b=\frac{1}{2}\quad \sqrt{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2})^2}=-2(\frac{1}{2})\quad \rightarrow +=-\quad \rightarrow not\ o.k.$$
$$b=-\frac{1}{2}\quad \sqrt{\frac{3}{4}+(-\frac{1}{2})^2}=-2(-\frac{1}{2})\quad \rightarrow 1=1\quad o.k.$$
$$\boxed{z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$$

תשובה: $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

(2) נעבור להצגה טריגונומטרית:

$$\tan^{-}=\frac{-1/2}{\sqrt{3}/2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$^{-}=-30^\circ+180^\circ k$$
$$^{-}=-30^\circ\quad \leftarrow 4nd\ quadrant$$
$$R=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2}=1$$
$$z=cis\,(-30)^\circ$$

ובהתאם על פי משפט דה-מואבר $z^{6n}=1^{6n}cis((-30)^\circ\cdot 6n)=cis\,(-180n)^\circ$ **.**

עבור n **אי זוגי נקבל** $z^{6n}=cis\,(-180)^\circ=-1$ **.**

עבור n **זוגי נקבל** $z^{6n}=cis\,(0)^\circ=1$ **.**

תשובה: קיימים רק שני ערכים אפשריים ל- z^{6n} **והם :** -1 **ו-** 1**.**

א. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{2\ell n\,x\cdot(2-\ell n\,x)}{x\cdot(1-\ell n\,x)^2}$ **.**

(1) הארגומנט של פונקציית ה- ℓn **צ"ל חיובי ושני הגורמים במכפלת מכנה הנגזרת צריכים להיות שונים מ-** 0 **.**

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x>0\\(2)\ x\neq 0\\(3)\ 1-\ell n\,x\neq 0\quad\rightarrow \ell n\,x\neq 1\quad\rightarrow x\neq e\end{array}\right\}\boxed{x>0,\,x\neq e}$$

תשובה: $x>0,\,x\neq e$ **.**

(2) מכנה הנגזרת מתאפס גם עבור $x=e$ **.**

$$\lim_{x\to e}\frac{2\ell n\,x\cdot(2-\ell n\,x)}{x\cdot(1-\ell n\,x)^2}=\lim_{x\to e}\frac{2\ell n\,e\cdot(2-\ell n\,e)}{e\cdot(1-\ell n\,e)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{e\cdot(1-\ell n\,(e+h))^2}=\lim\frac{2}{e\cdot 0^+}=+\infty$$

כלומר הנגזרת שואפת ל- $+\infty$ **כאשר מתקרבים לישר** $x=e$ **ולכן הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.**

תשובה: $x=e$ **.**

(3) נשווה את מונה הנגזרת ל- 0**, על מנת למצוא נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **.**

$$f'(x)=\frac{2\ell n\,x\cdot(2-\ell n\,x)}{x\cdot(1-\ell n\,x)^2}$$

$$\ell n\,x=0\quad\rightarrow x=1\quad\rightarrow\boxed{(1,0)}$$

$$\ell n\,x=2\quad\rightarrow x=e^2\quad\rightarrow\boxed{(e^2,0)}$$

תשובה: נקודות חיתוך עם ציר x **:** $(1,0)$ **,** $(e^2,0)$ **, אין נקודות חיתוך עם ציר ה-** y **.**

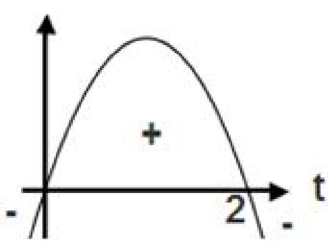
(4) נמצא תחומי חיוביות שליליות, על פי גרף הפרבולה בעלת המקסימום של המונה $2t(2-t)$ $(t=\ell n\,x)$ **,**

ובמגבלות תחום ההגדרה, כמובן.

$$0<\ell n\,x<2\quad\rightarrow 1<x<e^2,\,x\neq e$$

$$\ell n\,x<0\quad\rightarrow 0<x<1\quad\cup\quad\ell n\,x>2\quad\rightarrow x>e^2$$

תשובה: חיוביות: $1<x<e^2,\,x\neq e$**, שליליות:** $x>e^2$ **או** $0<x<1$

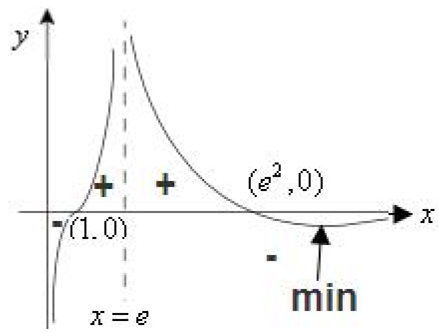


ב. קיימת אסימפטוטה אופקית $y=0$, ובהתאם חייבת להיות נקודת מינימום אחת, בתחום $x>e^2$,

כי הפונקציה עוברת מחיוביות לשליליות עבור $x=e^2$.

נצא מהנחה שאין נקודות קיצון נוספות (או מעל לנקודת פיתול אחת בפונקציה $f(x)$),

כי *לא* התבקשנו למצוא תחומי עלייה וירידה, *אלא* לצייר בהתאם לתחומי חיוביות ושליליות והאסימפטוטה $y=0$.



ג. הישר $y=-4$ *משיק* לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x>e$.

(1) בנקודה זו ערך הנגזרת שווה ל- 0, כי $y=-4$ פונקציה קבועה, ולכן $x=e^2$.

תשובה: $(e^2,-4)$

(2) $(e^2,-4)$ **היא נקודת מקסימום, כי הנגזרת ($f'(x)$) עוברת מחיוביות לשליליות על פי תת סעיף א (4).**

ובהתאם הפונקציה $f(x)$ עוברת מעלייה לירידה, ולכן $f(e^3)<f(e^2)=-4$.

תשובה: הוכַח, כי $f(e^3)<-4$.

(3) על פי ציור גרף הנגזרת השטח המבוקש נמצא מתחת לציר ה- x , ונתון כי גודלו 0.5.

$$S=\int_{e^2}^{e^3}(0-f'(x)\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_{e^2}^{e^3}$$

$$S=-f(e^3)-(-f(e^2))$$

$$0.5=-f(e^3)-4$$

$$\boxed{f(e^3)=-4.5}$$

תשובה: $f(e^3)=-4.5$ **.**

הערה – גודל השטח שווה ל- 1 ו*לא* ל- 0.5 , אבל התשובה ניתנה בהתאם לפתרון המקורי.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a^{x+1}}{a^{2x}-1}$ **,** $0<a<1$ **.**

מכנה הפונקציה צריך להיות שונה מ- 0 **.**

$$a^{2x}-1\neq 0 \quad \rightarrow a^{2x}\neq 1$$

$$2x\neq 0 \quad \rightarrow \boxed{x\neq 0}$$

תשובה: $x\neq 0$ **.**

ב. נראה כי הפונקציה היא אי-זוגית, כלומר $f(-x)=-f(x)$ **(פונקציה סימטרית לראשית הצירים).**

$$f(-x)=\frac{a^{-x+1}}{a^{-2x}-1}$$

$$f(-x)=\frac{a^{-x+1}}{\frac{1}{a^{2x}}-1}=\frac{a^{-x+1}}{\frac{1-a^{2x}}{a^{2x}}}=\frac{a^{-x+1}\cdot a^{2x}}{1-a^{2x}}=\frac{a^{x+1}}{1-a^{2x}}=-\frac{a^{x+1}}{a^{2x}-1}$$

$$\boxed{f(-x)=-f(x)}$$

תשובה: הוכַח.

ג. נמצא תחומי עלייה וירידה, כאשר נשים לב כי $\ell n\, a<0$ **כי** $0<a<1$ **.**

$$f'(x)=\frac{a^{x+1}\cdot \ell n\, a\cdot (a^{2x}-1)-2a^{2x}\cdot \ell n\, a\cdot a^{x+1}}{(a^{2x}-1)^2}$$

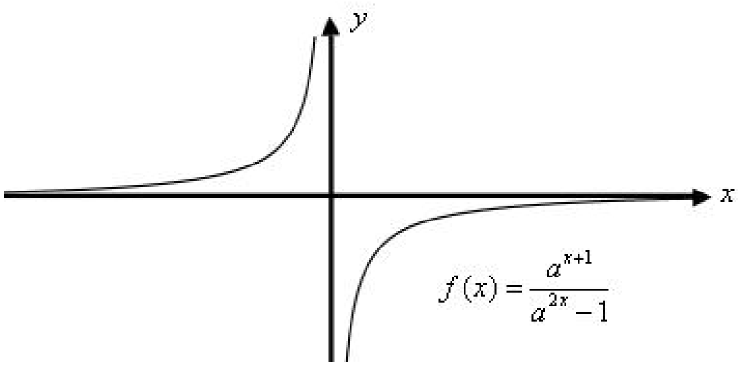
$$f'(x)=\frac{a^{x+1}\cdot \ell n\, a\cdot (a^{2x}-1-2a^{2x})}{(a^{2x}-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{a^{x+1}\cdot \ell n\, a\cdot (-a^{2x}-1)}{(a^{2x}-1)^2}}$$

לכל $x\neq 0$ **: המכנה חיובי ,** a^{x+1} **חיובי,** $\ell n\, a<0$ **,** $-a^{-2x}-1<0$ **ובהתאם המונה חיובית לכל** $x\neq 0$ **.**

תשובה: הפונקציה עולה עבור $x>0$ **או** $x<0$ **, יורדת לאף** x **.**

ד. הסקיצה המתאימה משמאל:



ה. עבור $x=1$ **שיעור ה-** y **בנקודת ההשקה**

הוא $\frac{a^{1+1}}{a^{2\cdot 1}-1}=\frac{a^2}{a^2-1}$ **.**

שיפוע המשיק בנקודה T **שווה לשיפוע**

המשיק ℓ **כי המשיקים מקבילים,**

ועקב זוגיות פונקציית הנגזרת, $f'(-x)=f'(x)$ **,**

הוא יתקבל עבור $x=-1$ **בנקודה** T **, כי זו הנקודה היחידה שבה המשיק מקביל לישר** ℓ **.**

הפונקציה $f(x)$ **אי-זוגית, כלומר** $f(-x)=-f(x)$ **, ולכן** $f(-1)=-f(1)=-\frac{a^2}{a^2-1}=\frac{a^2}{1-a^2}$ **.**

תשובה: $\mathrm{T}(-1,\frac{a^2}{1-a^2})$ **.**