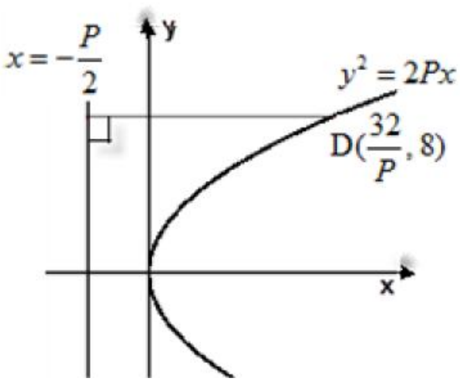
א. הנקודה D נמצאת על הפרבולה $y^2=2Px$, $(P>0)$, ברביע הראשון.

מרחקה מציר ה- x הוא 8, לכן $y_D=8$.

נציב $y_D=8$ במשוואת הפרבולה ונקבל: $8^2=2Px$,

ומכאן ש- $x_D=\frac{32}{P}$ ובהתאם שיעורי D הם $D(\frac{32}{P},8)$.



מרחק הנקודה מהמדריך $x=-\frac{P}{2}$, הוא כהפרשי שיעורי ה- x ,

והוא : $\frac{32}{P}-(-\frac{P}{2})=\frac{32}{P}+\frac{P}{2}$.

תשובה: מרחק הנקודה D מהמדריך של הפרבולה הוא $\frac{32}{P}+\frac{P}{2}$.

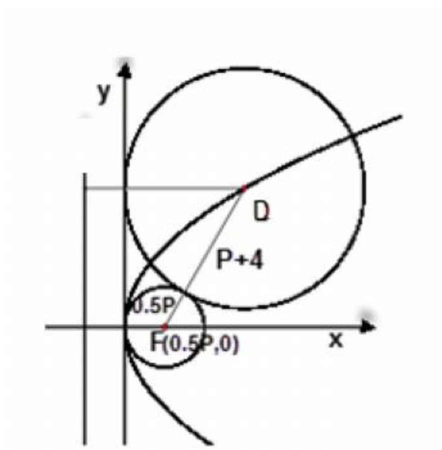
ב. שני המעגלים משיקים מבחוץ, ולכן אורך קטע המרכזים שווה לסכום הרדיוסים.

אורך הרדיוס של המעגל, שמרכזו בנקודה D , נתון והוא $P+4$.

מוקד הפרבולה הוא $F(\frac{P}{2},0)$, וכיוון שהמעגל השני משיק לציר ה- y הרי שרדיוסו הוא $\frac{P}{2}$.

אורכו של קטע המרכזים הוא מרחק הנקודה D מהמוקד,

ששווה למרחקה מהמדריך (על פי תכונות הפרבולה)



ולכן אורכו של קטע המרכזים, על פי סעיף א, הוא $\frac{32}{P}+\frac{P}{2}$.

המשוואה המתאימה היא $\frac{32}{P}+\frac{P}{2}=P+4+\frac{P}{2}$.

נפתור את המשוואה:

$$\frac{32}{P}+\frac{P}{2}=P+4+\frac{P}{2}$$
$$\frac{32}{P}=P+4$$
$$P^2+4P-32=0$$
$$P=-8,\quad P=4$$

נתון כי $P>0$ ובהתאם $P=4$ ומשוואת הפרבולה היא $y^2=8x$.

תשובה: $y^2=8x$.

ג. הנקודה K **נמצאת על הפרבולה** $y^2=8x$ **, ובהתאם שיעוריה** $\mathrm{K}(\frac{k^2}{8},k)$ **.**

משוואת משיק לפרבולה היא $yy_0=P(x+x_0)$ **.**

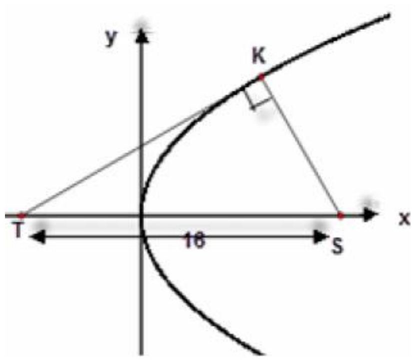
ולכן המשיק חותך את ציר ה- x **בנקודה שבה** $y=0$ **ולכן** $x=-x_0$ **.**

מכאן ששיעורי הנקודה T **הם** $\mathrm{T}(-\frac{k^2}{8},0)$ **.**

$x_{\mathrm{S}}-x_{\mathrm{T}}=16$ **ולכן** $\mathrm{S}(-\frac{k^2}{8}+16,0)$ **או** $\mathrm{S}(\frac{-k^2+128}{8},0)$ **.**

שיפוע המשיק לפרבולה הוא $\frac{P}{y_0}=\frac{4}{k}$ **ולכן שיפוע האנך (הנורמל) הוא** $-\frac{k}{4}$ **.**

המשוואה המתאימה היא :



$$m_{\mathrm{KS}}=\frac{y_{\mathrm{K}}-y_{\mathrm{S}}}{x_{\mathrm{K}}-x_{\mathrm{S}}}$$

$$-\frac{k}{4}=\frac{k-0}{\frac{k^2}{8}-(\frac{-k^2+128}{8})}\quad /:k>0$$

$$-\frac{1}{4}=\frac{8}{2k^2-128}$$

$$2k^2-128=-32$$

$$2k^2=96$$

$$k^2=48\quad\rightarrow x_{\mathrm{K}}=\frac{k^2}{8}=\frac{48}{8}=6$$

$$y_{\mathrm{K}}=k=\pm\sqrt{48}=\pm4\sqrt{3}$$

תשובה: שיעורי הנקודה K **הם** $(6,4\sqrt{3})$ **או** $(6,-4\sqrt{3})$ **.**

א. (1) נתון ישר ℓ שמשוואתו $\underline{x}=(1,2,-4)+t(1,-2,2)$ המאונך למישור ® ולכן מהווה את הנורמל שלו.

בהתאם משוואת מישור ® היא $x-2y+2z+d=0$.

מישור ® עובר בנקודה $A(8,0,0)$, הנמצאת על הקרן החיובית של ציר ה- x במרחק 8 יחידות מהראשית,

ולכן נציב את שיעוריה במשוואת המישור: $8-2\cdot0+2\cdot0+d=0$ ונקבל $d=-8$,

ומשוואת המישור היא $®: x-2y+2z-8=0$.

הנקודה B נמצאת על המישור ועל ציר ה- y , ולכן מתקיים $x_B=z_B=0$, ושיעוריה הם $B(0,-4,0)$.

הנקודה C נמצאת על המישור ועל ציר ה- z , ולכן מתקיים $x_C=y_C=0$, ושיעוריה הם $C(0,0,4)$.

נמצא את אורכי ששת המקצועות של הפירמידה OABC .

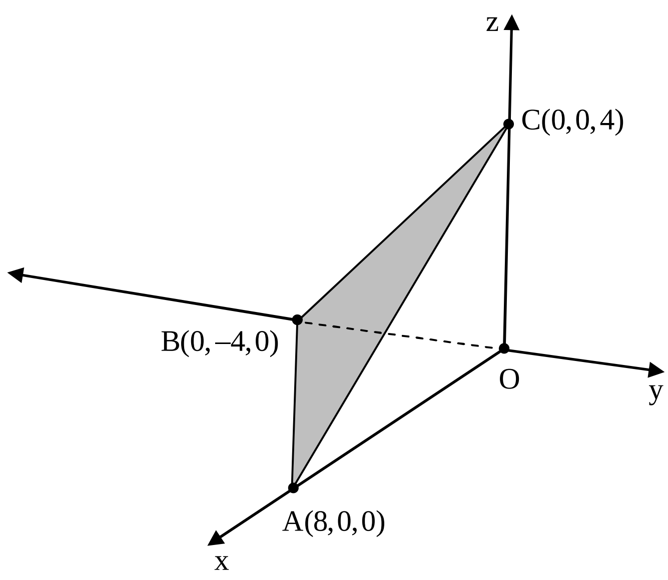
$OA=8$, $OB=4$, $OC=4$, $AB=\sqrt{(0-8)^2+(4-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{80}$,

$AC=\sqrt{(0-8)^2+(0-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{80}$, $BC=\sqrt{(0-8)^2+(0-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{32}$.

תשובה: $OA=8$, $OB=4$, $OC=4$, $AB=\sqrt{80}$, $AC=\sqrt{80}$, $BC=\sqrt{32}$.

(2) לא קיים קודקוד בפירמידה OABC , ממנו יוצאים שלושה מקצועות שווים ולכן הפירמידה אינה ישרה.

תשובה: הפירמידה OABC אינה ישרה.



ב. מישור הפאה OAC נפרש על ידי ציר ה- x וציר ה- z ובהתאם זהו מישור $[x,z]$, שמשוואתו $y=0$.

הנקודה D נמצאת על המקצוע AC, ולכן גם היא במישור $[x,z]$ וכן גם הישר OD.

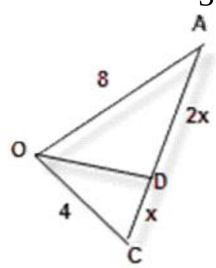
כיוון ש- OD חוצה זווית OAC, הרי ש- D אינה מתלכדת עם הנקודה C, אלא נמצאת בין A ל- C.

הנקודה $B(0,-4,0)$, שעל ציר ה- y, אינה על מישור הפאה OAC, והישר BC חותך את הפאה בנקודה C, ולכן המצב ההדדי בינו לישר OD, המוכל בפאה, הוא של הצטלבות.

<u>דרך פתרון חלופית:</u>

על פי משפט חוצה זווית במשולש OAC מתקיים: $\frac{AD}{DC}=\frac{OA}{OC}=\frac{8}{4}=\frac{2}{1}$.

על פי חלוקת קטע ביחס נתון מתקיים: $D(\frac{1\cdot8+2\cdot0}{3},\frac{1\cdot0+2\cdot0}{3},\frac{2\cdot4+1\cdot0}{3})=D(\frac{8}{3},0,\frac{8}{3})$,



ומשוואת הישר OD היא $\underline{x}=s(1,0,1)$.

$\overrightarrow{BC}=\underline{C}-\underline{B}=\underline{x}=(0,4,4)$ ומשוואת הישר BC היא $\underline{x}=(0,-4,0)+q(0,1,1)$.

קל לראות שהישרים אינם מקבילים, או מתלכדים.

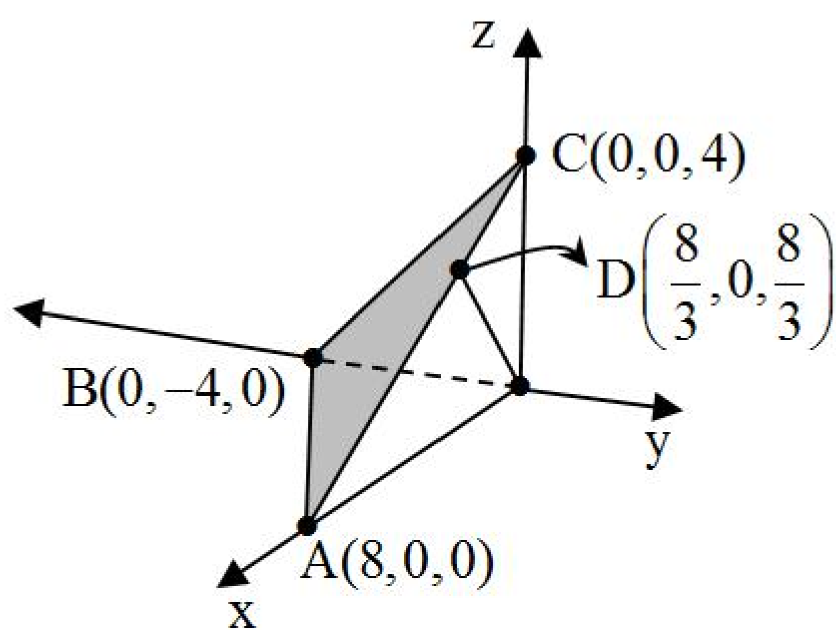
נקודה טיפוסית על BC היא: $(0,-4+q,q)$ ועל OD $(s,0,s)$.

נקבל שלוש משוואות: (1) $s=0$ (2) $0=-4+q \quad \to q=4$ (3) $s=q$ בסתירה לשתי הקודמות.

ניתן גם להסביר בדרך הבאה: נקודות C, B ו- O נמצאות במישור $[y,z]$.

אם OD מקביל או נחתך עם BC, אז גם נקודה D צריכה להיות במישור זה, אולם זה לא נכון כי $x_D\neq0$.

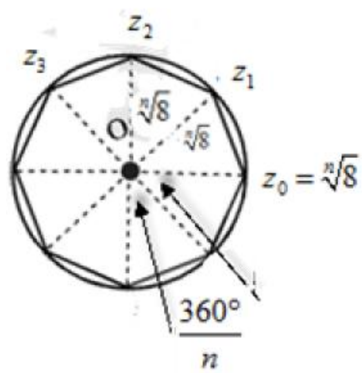
תשובה: הישר OD והישר BC מצטלבים.



א. נתונה המשוואה $z^n = 8$ **, כאשר** $n > 2$**.**

פתרונות המשוואה $z^n = 8\,cis\,0$ **הם:** $z_k = \sqrt[n]{8}\,cis(\frac{360°k}{n})$**.**

נראה שפתרונות המשוואה מהווים סדרה הנדסית שמנתה $\frac{360°}{n}$**.**



$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{\sqrt[n]{8}\,cis(\frac{360°(k+1)}{n})}{\sqrt[n]{8}\,cis(\frac{360°k}{n})}$$

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = cis(\frac{360°k+360°}{n} - \frac{360°k}{n})$$

$$\boxed{\frac{z_{k+1}}{z_k} = cis\frac{360°}{n}}$$

$z_0 = \sqrt[n]{8}$ **נמצא על הקרן החיובית של ציר ה-** x**,**

כאשר הארגומנט של כל פתרון נוסף גדול מזה של קודמו ב- $\frac{360°}{n}$**.**

מתקבלים n **משולשים שווי שוקיים, שאורך כל שוק שלהם היא** $\sqrt[n]{8}$**, החופפים על פי צלע זווית צלע,**

ולכן מתקבל מצולע משוכלל בעל n **צלעות.**

תשובה: הוכַח.

ב. $z_0 = \sqrt[n]{8}$ **ממשי וחיובי. בהתאם:** $z_1 = \sqrt[n]{8}\,cis(\frac{360°}{n})$ **,** $z_2 = \sqrt[n]{8}\,cis(\frac{720°}{n})$ **,** $z_3 = \sqrt[n]{8}\,cis(\frac{1080°}{n})$ **.**

נתון: $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot = -\sqrt{8}\,i$ **.**

$$\sqrt[n]{8}\cdot\sqrt[n]{8}\,cis(\frac{360°}{n})\cdot\sqrt[n]{8}\,cis(\frac{720°}{n})\cdot\sqrt[n]{8}\,cis(\frac{1080°}{n}) = -\sqrt{8}\,i$$

$$(\sqrt[n]{8})^4\,cis(\frac{360°}{n}+\frac{720°}{n}+\frac{1080°}{n}) = \sqrt{8}\cdot(-i)$$

$$8^{\frac{4}{n}}\,cis(\frac{2160°}{n}) = \sqrt{8}\,cis(270°)$$

$$8^{\frac{4}{n}} = 8^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \frac{4}{n} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow n = 8$$

$$cis(\frac{2160°}{8}) \stackrel{?}{=} cis270°$$

$$cis(270°) = cis270° \quad o.k.$$

תשובה: $n = 8$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=a\cdot x\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}$ **(** $a>0$ **הוא פרמטר).**

נוכיח כי הפונקציה $f(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית (הסימטרית לראשית הצירים).**

$$f(-x)=a\cdot(-x)\cdot e^{\frac{-(-x)^2}{8}}$$

$$f(-x)=-a\cdot x\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}$$

$$f(-x)=-f(x) \quad o.k.$$

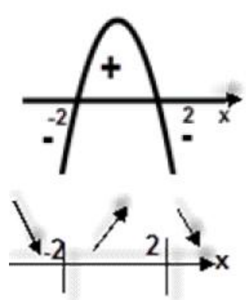
תשובה: הוכַח.

ב. (1) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=a\cdot\left[\ e^{\frac{-x^2}{8}}+x\cdot(-\frac{2x}{8})\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}\ \right]$$

$$f'(x)=ae^{\frac{-x^2}{8}}\cdot(1-\frac{1}{4}x^2)$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{a}{4}e^{\frac{-x^2}{8}}\cdot(4-x^2)}$$



$$4-x^2=0$$

$$x=2 \quad \rightarrow f(2)=a\cdot 2\cdot e^{\frac{-2^2}{8}}=2ae^{\frac{-1}{2}} \quad \rightarrow (2,\frac{2a}{\sqrt{e}})$$

$$x=-2 \quad \rightarrow (-2,\frac{-2a}{\sqrt{e}})$$

(שיעורי הנקודה $(-2,\frac{-2a}{\sqrt{e}})$ **נקבעו בהתאם לאי-הזוגיות של הפונקציה** $f(x)$ **).**

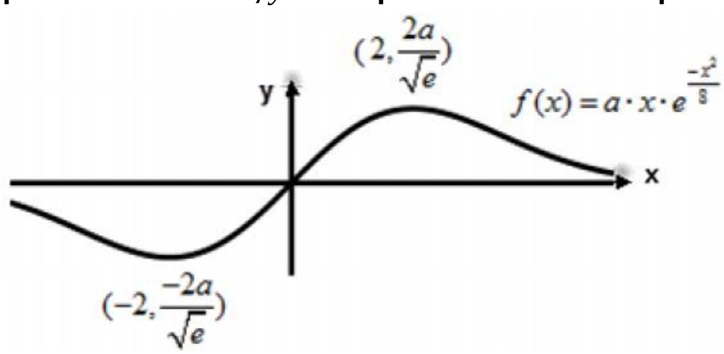
$\frac{a}{4}e^{\frac{-x^2}{8}}$ **חיובי, כי** $a>0$ **ו-** $e^{\frac{-x^2}{8}}>0$**, ולכן סימן הנגזרת נקבע על פי הביטוי** $4-x^2$ **.**

לביטוי פרבולה הפוכה ("בוכה"), ותחומי העלייה והירידה המתאימים, קובעים את סוג הקיצון.

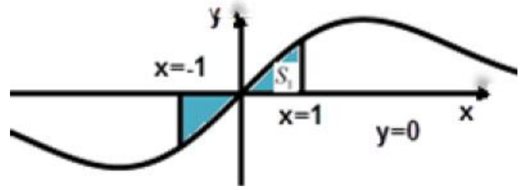
תשובה: $(-2,\frac{-2a}{\sqrt{e}})$ **מינימום ,** $(2,\frac{2a}{\sqrt{e}})$ **מקסימום.**

(2) גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים, בגלל אי זוגיות הפונקציה המוגדרת לכל x **.**

לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y=0$ **, כי הביטוי** $e^{\frac{-x^2}{8}}$ **שואף לאפס כאשר** $x\rightarrow\pm\infty$ **מהר יותר מאשר** $x\rightarrow\pm\infty$ **.**



ג. שני השטחים, הצבועים בכחול, שווים בגודלם – כי הפונקציה אי-זוגית ושני הישרים סימטריים גם לציר ה- y .



עבור $a=2$: $f(x)=2x\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}$.

נחשב שטח של אחד מהשטחים, על פי זיהוי הנגזרת הפנימית (של חזקת הפונקציה המעריכית).

$$S_1=\int_0^1 (2\cdot x\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}-0)\,dx$$

$$S_1=\int_0^1 (2\cdot(-4)\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}\cdot(\frac{-x}{4}))\,dx$$

$$S_1=-8\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}\Big]_0^1$$

$$S_1=-8\cdot(e^{\frac{-1^2}{8}}-e^{\frac{-0^2}{8}})$$

$$S_1=-8\cdot(\frac{1}{\sqrt[8]{e}}-1)$$

$$S_1=8-\frac{8}{\sqrt[8]{e}}$$

ובהתאם גודל השטח כולו הוא $16-\frac{16}{\sqrt[8]{e}}\approx 1.88$.

תשובה: השטח המוגבל הוא $16-\frac{16}{\sqrt[8]{e}}\approx 1.88$ יח"ר.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=\left[f(x)\right]^2$.

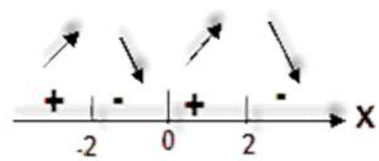
מכאן ש: $g'(x)=2f(x)f'(x)$.

תחומי העלייה והירידה של $g(x)$ נקבעים, בהתאם,

על פי תחומי החיוביות/ שליליות של $f(x)$,

ועל פי תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ (שזהים לתחומי החיוביות / שליליות של $f'(x)$).

על פי הגרף שבסעיף ב (2) נקבל שתחומי העלייה והירידה של $g(x)$ הם:



תשובה: $x=-2, x=2$ מקסימום , $x=0$ מינימום.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=a\cdot x\cdot \ell n\, x-x^2$ ($a>0$ הוא פרמטר).

פונקציית ה- ℓn מקבלת רק ביטויים חיוביים, ולכן $x>0$.

תשובה: הפונקציה מוגדרת עבור $x>0$.

ב. נראה שלפונקציה יש נקודת פיתול אחת בלבד.

$$f'(x)=a(\ell n\, x+x\cdot\frac{1}{x})-2x$$

$$\boxed{f'(x)=a(\ell n\, x+1)-2x}$$

$$f''(x)=a\cdot\frac{1}{x}-2$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{a-2x}{x}}$$

$$a-2x=0 \quad\rightarrow \boxed{x=0.5a}$$

מונה הנגזרת השנייה עובר מחיוביות לשליליות, כאשר המכנה חיובי,

ולכן הפונקציה $f(x)=a\cdot x\cdot \ell n\, x-x^2$ עוברת מקעירות כלפי מעלה $\cup$ לקעירות כלפי מטה וזו נקודת פיתול.

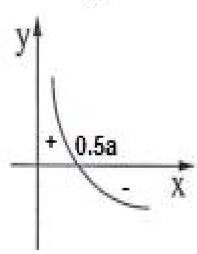
תשובה: $x=0.5a$ הוא שיעור ה- $x=0.5a$ של נקודת הפיתול היחידה.

ג. גרף IV הוא הגרף המתאים.

(1) תחומי החיוביות והשליליות תואמים לאלו שהוצגו בסעיף ב

(2) קיימת אסימפטוטה אנכית $x=0$

IV



ד. (1) נמצא את הערך של a כאשר נתון כי שיפוע המשיק בנקודת הפיתול שווה לאפס, כלומר $f'(0.5a)=0$.

$$0=a(\ell n\,0.5a+1)-2\cdot 0.5a \quad /:a>0$$
$$0=\ell n\,0.5a+1-1$$
$$0=\ell n\,0.5a$$
$$0.5a=1$$
$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$.

(2) עבור $a=2$ שיעור ה- x של נקודת הפיתול הוא 1.

כיוון שיש רק מנקודת פיתול אחת, הרי שלפונקצית הנגזרת יש רק קיצון אחד, עבור $x=1$.

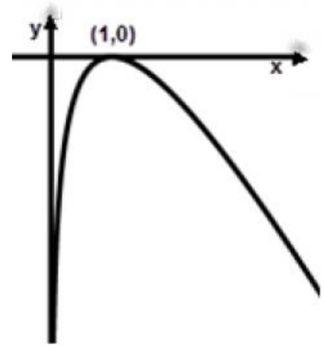
עבור $x<1$: $f''(x)>0$ ולכן $f'(x)$ עולה.

עבור $x>1$: $f''(x)<0$ ולכן $f'(x)$ יורדת.

נקודת המקסימום של גרף הנגזרת היא $(1,0)$, כי היה נתון שערך הנגזרת בנקודת הפיתול הוא 0 .

$x=0$ אסימפטוטה אנכית לגרף הנגזרת.

הסקיצה המתאימה:



(3) עבור $x=1$ הנגזרת אינה מחליפה סימן, ולכן אין נקודת קיצון ל- $f(x)$,

והיא יורדת לכל $x>0$.

תשובה: אין ל- $f(x)$ נקודות קיצון.

ה. שיפוע המשיק בנקודת הפיתול הוא $m=a(\ell n\,0.5a+1)-2\cdot 0.5\cdot a$, כלומר: $m=a(\ell n\,0.5a+1)-a$.

נמצא עבור אילו ערכים של a שיפוע המשיק גדול מ- 0 .

$$a(\ell n\,0.5a+1)-a>0 \quad /:a>0$$
$$\ell n\,0.5a+1-1>0$$
$$\ell n\,0.5a>0$$
$$0.5a>1$$
$$\boxed{a>2}$$

תשובה: $a>2$.