נסמן : x - מספר המזגנים שהסוחר קנה.

y - מחיר קנייה (שקלים) של כל אחד מן המזגנים.

ששה מהמזגנים נמכרו ב- 50% ממחיר הקנייה, כלומר בחצי ממחיר הקניה, במחיר של $0.5y$.

שאר המזגנים נמכרו ברווח של 40%, ובהתאם במחיר של $\frac{100+40}{100}\cdot y=1.4y$.

	כמות (מספר מזגנים)	מחיר למזגן (שקלים)	סך הכול (שקלים)
מכירת ששה	6	$0.5y$	$6\cdot 0.5y=3y$
שאר המזגנים	$x-6$	$1.4y$	$1.4y(x-6)$

ממכירת כל המזגנים קיבל הסוחר סך הכול $83,340$ שקלים.

המשוואה המתאימה היא: $3y+1.4y(x-6)=83,340$.

אילו הסוחר היה מוכר את כולם ברווח של 40%, הוא היה מקבל $88,200$ שקלים.

המשוואה המתאימה היא: $1.4xy=88,200$.

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}3y+1.4y(x-6)=83,340\\ 1.4xy=88,200 \quad /:1.4\end{cases}$$

$$\begin{cases}3y+1.3xy-8.4y=83,340\\ \boxed{xy=63,000}\end{cases}$$

$$3y+1.4\cdot 63,000-8.4y=83,340$$

$$-5.4y=-4,860 \quad /:(-5.4)$$

$$\boxed{y=900} \quad \to x=\frac{63,000}{900} \quad \to \boxed{x=70}$$

תשובה: הסוחר קנה על אחד מן המזגנים תמורת 900 שקלים.

ב. הסוחר קנה בסך הכול 70 מזגנים.

א. מעגל שמרכזו $M(3,5)$ **חותך את ציר ה-** y **בנקודה** $A(0,1)$ **.**

כיוון שהמיתר AB **מונח על ציר ה-** y **, הרי שישר שמאונך לו יהיה מקביל לציר ה-** x **.**

ולכן $y_Z = y_M = 5$ **.**

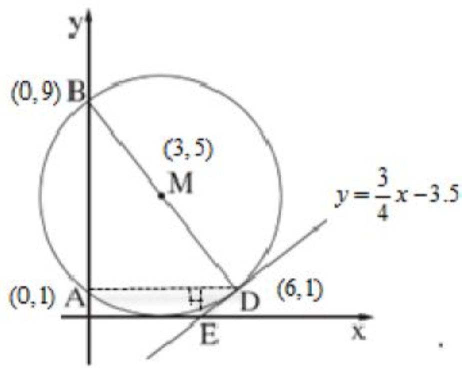
ישר העובר דרך מרכז המעגל ומאונך למיתר חוצה אותו,

לכן: $5 = \frac{1+y_B}{2} \quad \to y_B = 9$ **.**

תשובה: $B(0,9)$ **.**

ב. BD **הוא קוטר המעגל, לכן** $M(3,5)$ **היא אמצע הקוטר.**

נציב $x=0$ **במשוואת המעגל:**



$$\left.\begin{array}{l} 3 = \frac{0+x_D}{2} \quad \to x_D = 6 \\ 5 = \frac{9+y_D}{2} \quad \to y_D = 1 \end{array}\right\} \boxed{D(6,1)}$$

תשובה: $D(6,1)$ **.**

ג. המשיק DE **מאונך לרדיוס** MD **בנקודת ההשקה** $D(6,1)$ **.**

$$m_{MD} = \frac{1-5}{6-3} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$m_{DE} \cdot m_M = -1 \quad \leftarrow DE \perp MD$$

$$-\frac{4}{3} \cdot m_{DE} = -1 \quad \to m_{DE} = +\frac{3}{4}$$

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x-6)$$

$$\boxed{y = \frac{3}{4}x - 3.5}$$

תשובה: משוואת המשיק היא $y = \frac{3}{4}x - 3.5$ **.**

ד. הצלע BC **מקבילה לציר ה-** x **, לכן הגובה** h_{AD} **מקביל לציר ה-** y **.**

$$S_{\Delta ADE} = \frac{AD \cdot h_{AD}}{2}$$

$$S_{\Delta ADE} = \frac{(6-0)\cdot(1-0)}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ADE} = 3}$$

תשובה: $S_{\Delta ADE} = 3$ **.**

3 (בגרות עה דצמבר 14 מועד קיץ ד שאלון 35804)

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- עוסקים בספורט** $\bar{A}$ **- לא עוסקים בספורט**

B **- בנות** $\bar{B}$ **- בנים**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$(1)\quad P(B)=0.6 \quad \rightarrow P(\bar{B})=0.4$$

$$(2)\quad P(A/\bar{B})=0.8 \quad \rightarrow P(\bar{A}/\bar{B})=0.2$$

$$(3)\quad N(B\cap\bar{A})=4N(\bar{B}\cap\bar{A}) \quad \rightarrow P(B\cap\bar{A})=4P(\bar{B}\cap\bar{A})$$

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$(2)\quad P(A/\bar{B})=0.8$$

$$P(A/\bar{B})=\frac{P(A\bigcap\bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$0.8=\frac{P(A\bigcap\bar{B})}{0.4}$$

$$P(A\bigcap\bar{B})=0.32 \quad \rightarrow P(\bar{B}\bigcap\bar{B})=0.08 \quad \rightarrow P(B\bigcap\bar{A})=4\cdot 0.08=0.32$$

נציב בטבלה ונשלים נתונים:

	A **ספורט**	$\bar{A}$ **לא ספורט**	
B **- בנות**	0.28	0.32	0.6
$\bar{B}$ **- בנים**	0.32	0.08	0.4
	0.6	0.4	1

(1) תשובה: ההסתברות שנבחרה בת שעוסקת בספורט היא 0.28 **.**

(2) ידוע שנבחרה בת, נחשב את ההסתברות שהיא עוסקת בספורט.

$$P(A/B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\frac{0.28}{0.6}=\frac{7}{15}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{7}{15}$ **.**

(2) נמצא את ההסתברות למאורע "לפחות 4 מתוך ה- 5 עוסקים בספורט":

את $P_4(5)$ נחשב באמצעות נוסחת ברנולי,

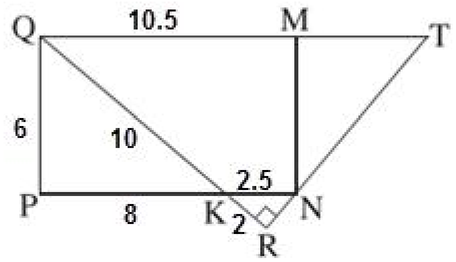
כי זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $p = 0.6$, $n = 5$, $k = 4$

$$P_4(5) = \binom{5}{4} 0.6^4 (1-0.6)^{5-4} = 5 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4 = 0.2592$$

$$P_5(5) = 0.6^5 = 0.07776$$

וההסתברות המבוקשת היא: $0.2592 + 0.07776 = 0.33696$

תשובה: ההסתברות שלפחות 4 מתוך ה- 5 שנבחרו עוסקים בספורט היא 0.33696 .



<u>נתונים</u>

1. $MNPQ$ **מלבן.**

2. $\sphericalangle R = 90°$ **.**

עבור ב: 3. $QM = 10.5$ **ס"מ 4.** $QK = 10$ **ס"מ 5.** $KR = 2$ **ס"מ**

6. $KN < PK$ **.**

צ"ל: א. $PK \cdot KN = QK \cdot KR$ **ב.** PK **ג.** PQ

ד. (1) $\Delta QRT \sim \Delta KRN$ **. (2)** QT

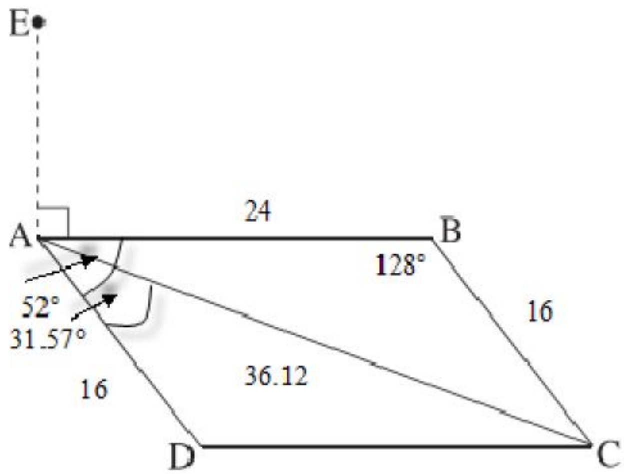
הסבר		טענה	נימוק
1	7	$MNPQ$ **מלבן**	נתון
7	8	$\sphericalangle P = 90°$	זוויות המלבן ישרות
2	9	$\sphericalangle R = 90°$	נתון
9 ,8	10	$\sphericalangle P = \sphericalangle R$ **(ז)**	כלל המעבר
	11	$\sphericalangle QKP = \sphericalangle RKN$ **(ז)**	זוויות קדקודיות שוות זו לזו
11 ,10	12	$\Delta PKQ \sim \Delta RKN$	משפט דמיון זווית זווית
12	13	$\frac{PK}{RK} = \frac{PQ}{RN} = \frac{KQ}{KN}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
13	14	$PK \cdot KN = QK \cdot KR$	חישוב
מ.ש.ל. א			
3	15	$QM = 10.5$ **ס"מ**	נתון
7	16	$PN = QM = 10.5$ **ס"מ**	צלעות נגדיות שוות במלבן וכלל המעבר
4, 5, 14, 16	17	$PK \cdot (10.5 - PK) = 10 \cdot 2$	הצבה
6	18	$KN < PK$	נתון
18 ,17	19	$PK = 8$ **ס"מ**	חישוב ופסילת האפשרות ש- $PK = 2.5$ **ס"מ**
מ.ש.ל. ב			
4, 8, 19	20	$PQ = 6$ **ס"מ**	משפט פיתגורס ΔQKP
מ.ש.ל. ג			
7	21	$PN \parallel QM$	צלעות המלבן מקבילות זו לזו
21	22	$\frac{KN}{QT} = \frac{RK}{RQ} = \frac{RN}{RT}$	משפט תאלס הרחבה 1
22	23	$\Delta QRT \sim \Delta KRN$	משפט דמיון צלע צלע צלע
מ.ש.ל. ד (1)			

הסבר		טענה	נימוק
16, 19	24	$KN =$ 2.5 ס"מ	הפרש קטעים
4, 5	25	$RQ =$ 12 ס"מ	סכום קטעים
22, 24, 25	26	$\frac{2.5}{QT}=\frac{2}{12}$	הצבה
26	27	$QT =$ 15 ס"מ	חישוב
מ.ש.ל. ד (2)			

א. $ABCD$ **מקבילית (נתון).**

$\angle B = 128° \rightarrow \angle BAD = 52°$ **(זוויות סמוכות במקבילית משלימות ל-** $180°$**) .**

$BC = AD = 16$ **(צלעות נגדיות שוות במלבן) .**



$\underline{\Delta ABC}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$$
$$(AC)^2 = 24^2 + 16^2 - 2 \cdot 24 \cdot 16 \cdot \cos 128°$$
$$(AC)^2 = 1304.8$$
$$\boxed{AC = 36.12cm} \quad \leftarrow AC > 0$$

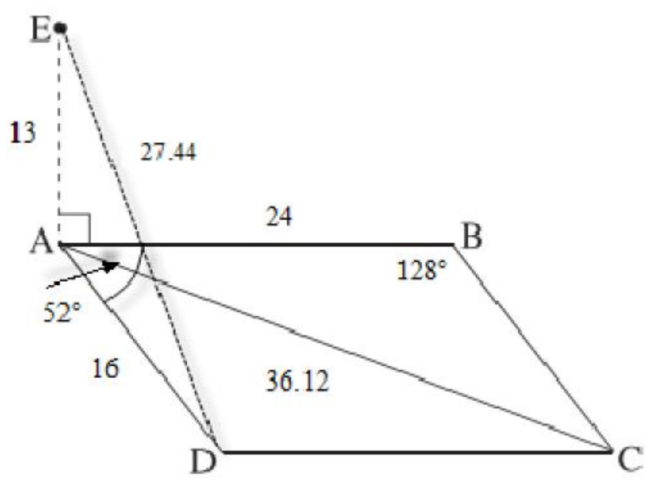
תשובה: האורך של האלכסון AC **הוא** 36.12 **ס"מ.**

ב. $\underline{\Delta ADC}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$\cos\angle CAD = \frac{(AD)^2 + (AC)^2 - (DC)^2}{2AD \cdot AC}$$
$$\cos\angle CAD = \frac{16^2 + 36.12^2 - 24^2}{2 \cdot 16 \cdot 36.12}$$
$$\cos\angle CAD = 0.85$$
$$\boxed{\angle CAD = 31.57°} \quad \leftarrow 0° < \angle CAD < 52°$$

תשובה: $\angle CAD = 31.57°$ **.**

ג. $\angle EAD = 90° + 52° = 142°$ **(סכום זוויות) .**



$\underline{\Delta EAD}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(ED)^2 = (AE)^2 + (AD)^2 - 2AE \cdot AD \cdot \cos\angle EAD$$
$$(ED)^2 = 13^2 + 16^2 - 2 \cdot 13 \cdot 16 \cdot \cos 142°$$
$$(ED)^2 = 752.8$$
$$\boxed{ED = 27.44cm} \quad \leftarrow ED > 0$$

היקף ΔEAD **:** 56.44 **ס"מ** $= 27.44 + 16 + 24$

תשובה: היקף ΔEAD **:** 56.44 **ס"מ.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

תחום ההגדרה, ביטוי במכנה שונה מאפס.

תשובה: $x\neq 1$.

ב. $x=1$ **אסימפטוטה מקבילה לציר ה-** y **-** $x=1$ **מאפס מכנה ולא מונה.**

אין אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x **- חזקת מונה** (2) **גדולה מחזקת מכנה** (1) **.**

תשובה: $x=1$ **.**

ג. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ושיעורי נקודת החיתוך** $(0,-2)$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:** $0=x^2-2x+2$ **.**

הביטוי שבתוך השורש שלילי, אין פתרונות – ובהתאם, אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x **.**

תשובה: $(0,-2)$ **.**

ד. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}}$$

$$0=x^2-2x=x(x-2)$$

$$x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,-2)}$$

$$x=2 \quad \rightarrow y=\frac{2^2-2\cdot 2+2}{2-1}=2 \quad \rightarrow \boxed{(2,2)}$$

גרף סימני <u>מונה הנגזרת</u> (*לא* גרף הנגזרת עצמה) הוא פרבולה בעלת מינימום.

(עיגול ריק באיור מציין שהנגזרת אינה מוגדרת עבור $x=1$ **.)**

מכנה הנגזרת חיובי.

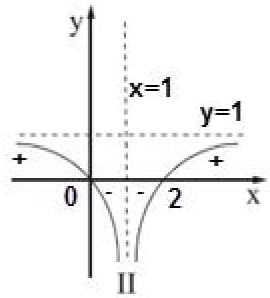
עבור $x=0$ **הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות ולכן הפונקציה מעלייה לירידה, ולכן מקסימום.**

עבור $x=2$ **הנגזרת עוברת משלילית לחיובית ולכן הפונקציה מירידה לעלייה, ולכן מינימום.**

תשובה: $(0,2)$ **מקסימום ,** $(2,2)$ **מינימום.**

ה. בסעיף ד הראינו ש- $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ **:**

הגרף המתאים הוא גרף II **.**



נביא שלושה נימוקים, המייחדים גרף זה (בדרך כלל נדרשים לפחות שלושה נימוקים לסעיף מעין זה).

האסימפטוטות שבציור נכונות בכל שלושת הגרפים ($x=1$ **ו-** $y=1$ **).**

(1) הנגזרת מתאפסת בשתי נקודות, המתאימות עבור $x=0$ **ו-** $x=2$ **.**

(2) תחומי החיוביות מתאימים עבור $x>2$ **או** $x<0$ **.**

(3) תחומי השליליות מתאימים עבור $1<x<2$ **או** $0<x<1$ **.**

א. (1) נתונה הפונקציה $y=-x^2-6x+b$ **(** b **הוא פרמטר).**

זוהי פונקציה ריבועית, בעלת גרף של פרבולה בעלת מקסימום.

$$x_{\max}=\frac{-(-6)}{2(-1)}=\frac{6}{-2}=-3$$

תשובה: שיעור ה- x **של נקודת המקסימום הוא** -3.

(2) נתון $y_{\max}=4$ **. נציב את שיעורי נקודת המקסימום** $(-3,4)$ **בתבנית הפונקציה.**

$$4=-(-3)^2-6(-3)+b$$

$$4=-9+18+b ,$$

$$\boxed{b=-5}$$

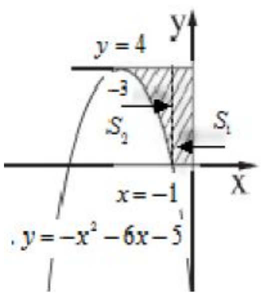
תשובה: $b=-5$**.**

ב. נציב $b=-5$ **והפונקציה הנתונה היא** $y=-x^2-6x-5$ **.**

הישר $y=4$ **עובר בנקודת המקסימום.**

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך, הימנית עם ציר ה- x **.**

$0=-x^2-6x-5 \quad \rightarrow x=-1, \quad x=-5$ **.**



נעלה אנך $x=-1$ **ונחשב את השטח המבוקש על ידי סכום שני שטחים.**

השטח הימני הוא מלבן, שגודלו $S_1=1\cdot 4=4$

$$S_2=\int_{-3}^{-1}(4-(-x^2-6x-5))dx$$

$$S_2=\int_{-1}^{1}(x^2+6x+9)dx$$

$$S_2=\frac{x^3}{3}+3x^2+9x\Big]_{-3}^{-1}$$

$$x=-1:\quad \frac{(-1)^3}{3}+3\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)=-\frac{19}{3}$$

$$x=-3:\quad \frac{(-3)^3}{3}+3\cdot(-3)^2+9\cdot(-3)=-9$$

$$S_2=-\frac{19}{3}-(-9)=2\frac{2}{3}$$

$$S_1+S_2=4+2\frac{2}{3}=6\frac{2}{3}$$

תשובה: גודל השטח המקווקו הוא $6\frac{2}{3}$ **יח"ר .**

בגרות עה דצמבר 14 מועד קיץ ד שאלון 35804

א. נתונה הפונקציה - $g(x)=\frac{1}{6}x^2+2$ **שלה גרף של פרבולה בעלת מינימום** $(a=\frac{1}{6}>0)$ **,**

והפונקציה - $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+8$ **שלה גרף של פרבולה בעלת מקסימום** $(a=-\frac{1}{3}<0)$ **.**

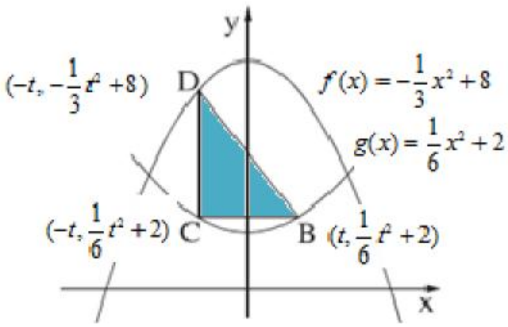
נסמן את שיעור ה- x **של הנקודה** B **ב-** t **. בהתאם, שיעורי הנקודה** B **שעל** $g(x)=\frac{1}{6}x^2+2$ **הם** $\text{B}(t,\frac{1}{6}t^2+2)$ **.**

$y_C=y_B$ **: ציר הסימטריה של הפרבולה** $g(x)=\frac{1}{6}x^2+2$ **הוא** $x=0$ **ומכאן ש-** $x_C=-x_B$ **ו-** $\text{C}(-t,\frac{1}{6}t^2+2)$ **.**

$x_D=x_C=-t$ **: שיעורי הנקודה** D **שעל** $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+8$ **הם** $\text{D}(-t,-\frac{1}{3}(-t)^2+8)$ **, כלומר** $\text{D}(-t,-\frac{1}{3}t^2+8)$ **.**

תשובה: $\text{B}(t,\frac{1}{6}t^2+2)$ **,** $\text{C}(-t,\frac{1}{6}t^2+2)$ **,** $\text{D}(-t,-\frac{1}{3}t^2+8)$ **.**

ב. נביע באמצעות t **את שטח המשולש** BCD **.**



$$\text{BC}=x_B-x_C=t-(-t)=t+t=2t$$

$$\text{CD}=y_D-y_C=-\frac{1}{3}t^2+8-(\frac{1}{6}t^2+2)=-\frac{1}{3}t^2+8-\frac{1}{6}t^2-2=-\frac{1}{2}t^2+6$$

$$S_{\Delta BCD}=\frac{\text{BC}\cdot\text{CD}}{2}=\frac{2t\cdot(-\frac{1}{2}t^2+6)}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta BCD}=-\frac{1}{2}t^3+6t}$$

תשובה: $S_{\Delta BCD}=-\frac{1}{2}t^3+6t$ **.**

ג. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *שטח המשולש* BCD.

כלומר: $\boxed{S(t)=-\frac{1}{2}t^3+6t}$

נמצא את נקודת הקיצון.

$\boxed{S'(t)=-1.5t^2+6}$

$0=-1.5t^2+6$

$1.5t^2=6$

$t^2=4$

$\boxed{t=2} \quad \leftarrow 0<t<\sqrt{24},(f(x)=0)$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון.

$S'(3)=-1.5\cdot 1^2+6>0$

$S'(1)=--1.5\cdot 3^2+6<0$

0	1	2	3	$\sqrt{24}$	x
	+	0	-		S'
	↗	Min	↘		מסקנה

עבור $t=2$ **הפונקציה עוברת מעלייה לירידה ולכן זו נקודת מקסימום.**

תשובה: $t=2$ **יביא את שטח משולש** BCD **למקסימום.**