א. סדרה a_n היא סדרה הנדסית, שכל איבריה חיוביים ולכן $a_n > 0$, $q > 0$.

נתון: $a_3 + a_4 = 20a_5$, נפתח את המשוואה.

$$a_1q^2 + a_1q^3 = 20a_1q^4 \quad / : a_1q^2 > 0$$
$$1 + q = 20q^2$$
$$0 = 20q^2 - q - 1$$
$$q_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{40} \quad \rightarrow \boxed{q = 0.25} \quad \leftarrow q > 0$$

תשובה: מנת הסדרה ההנדסית היא 0.25 .

ב. נתון: $a_1 = 4096$.

מכניסים כמה מספרים בין a_4 - ל- a_5 כך שנוצרת סדרה חשבונית יורדת, שסכומה 3880 .

$$a_4 = a_1q^3 = 4096 \cdot 0.25^3 \quad \rightarrow a_4 = 64$$
$$a_5 = a_4 \cdot q = 64 \cdot 0.25 \quad \rightarrow a_5 = 16$$

נמצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית החדשה,
בעזרת נוסחת הסכום הראשונה שבדף הנוסחאות .

$$S_n = \frac{\mathrm{n}(a_1 + a_n)}{2}$$
$$3880 = \frac{\mathrm{n}(64 + 16)}{2}$$
$$3880 = 40n$$
$$n = 97$$

נמצא את הפרש הסדרה החשבונית.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$16 = 64 + (97-1)d$$
$$-48 = 96d$$
$$\boxed{d = -0.5}$$

תשובה: הפרש הסדרה החשבונית הוא -0.5 .

א. בסיס הפירמידה משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

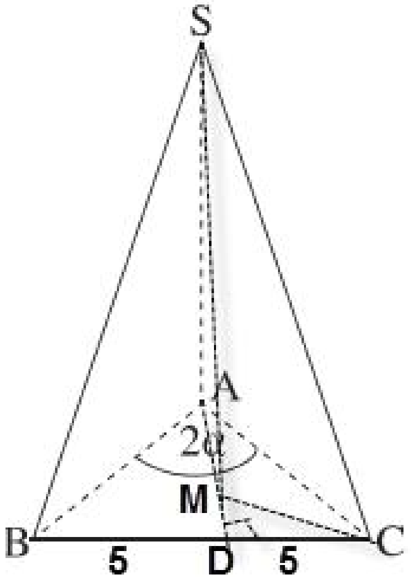
הגובה (SM) בפירמידה ישרה יורד למרכז המעגל החוסם, שהוא מפגש אנכים אמצעיים,

ולכן M היא על AD , הגובה והתיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים ABC .

. $BD = DC = \frac{10}{2} = 5cm$

$\sphericalangle DAC = \alpha$ **כי התיכון לבסיס במש"ש הוא גם חוצה זווית הראש.**

(1) נמצא את אורך הגובה AD .



$$\underline{\Delta ADC}$$

$$\tan\alpha = \frac{DC}{AD}$$

$$\boxed{AD = \frac{5}{\tan\alpha}}$$

תשובה: הגובה לצלע BC ב- ΔABC הוא $\frac{5}{\tan\alpha}$ **.**

(2) נמצא את שטח ΔABC .

$$\underline{\Delta ABC}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = 10 \cdot \frac{5}{\tan\alpha} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{25}{\tan\alpha}}$$

תשובה: $S_{\Delta ABC} = \frac{25}{\tan\alpha}$ **.**

(3) נמצא את רדיוס המעגל שחוסם את ΔABC , באמצעות משפט סינוסים במשולש זה.

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2R$$

$$\frac{10}{2\sin 2\alpha} = R$$

$$\boxed{R = \frac{5}{\sin 2\alpha}}$$

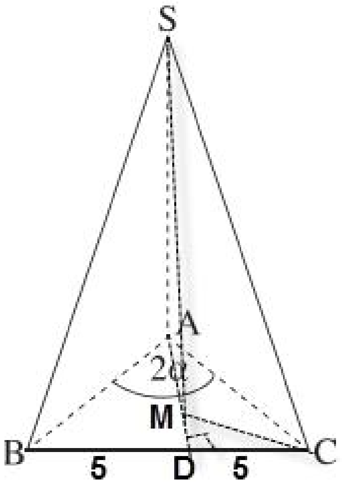
תשובה: רדיוס המעגל החוסם את ΔABC הוא $\frac{5}{\sin 2\alpha}$ **.**

ב. נתון כי הזווית שבין במקצוע הצדדי לבסיס הפירמידה היא $60°$.

זווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה היא $\sphericalangle SCM$

שהיא הזווית שבין המקצוע צדדי SC להיטל שלו על הבסיס CM , שהוא גם רדיוס המעגל החוסם.

(1) נמצא את גובה הפירמידה, את SM.



$\underline{\Delta SCM}$

$$\tan 60° = \frac{SM}{CM}$$

$$\frac{5\tan 60°}{\sin 2\sim} = SM$$

$$\boxed{SM = \frac{5\sqrt{3}}{\sin 2\sim}}$$

תשובה: גובה הפירמידה הוא $\frac{5\sqrt{3}}{\sin 2\sim}$ ס"מ.

(2) נמצא את נפח הפירמידה.

$$V = \frac{B \cdot H}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{\tan \sim} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{\sin 2\sim}$$

$$\boxed{V = \frac{125\sqrt{3}}{3\tan\sim \sin 2\sim} = \frac{72.17}{\tan\sim \sin 2\sim}}$$

תשובה: נפח הפירמידה הוא $\frac{125\sqrt{3}}{3\tan\sim \sin 2\sim} = \frac{72.17}{\tan\sim \sin 2\sim}$ סמ"ק.

נוסחת הגידול והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$, כאשר M_0 - הכמות ההתחלתית

q הוא גורם הגידול, M_t הכמות לאחר זמן t.

א. דנה הפקידה $20,000$ שקלים בריבית חודשית של 4% , $q = \frac{100+4}{100} = 1.04$.

לכן, לאחר 5 שנים יהיה הסכום בתוכנית: $24,333.06$ שקלים $= 20,000 \cdot 1.04^5$ שקלים.

תשובה: הסכום בתכנית לאחר שנים הוא $24,333.06$ שקלים.

ב. דנה הוסיפה $6,000$ שקלים לסכום שהצטבר בתוכנית, ולכן הסכום החדש הוא $30,333.06$ שקלים.

נמצא כעבור כמה שנים יהיה בתוכנית החיסכון סכום של $39,916$ שקלים.

$$39,916 = 30,333.06 \cdot 1.04^t \quad / : 30,333.06$$
$$1.3519 = 1.04^t$$
$$\ell n 1.3519 = \ell n 1.04^t$$
$$\ell n 1.3519 = t \ell n 1.04$$
$$\frac{\ell n 1.3519}{\ell n 1.04} = t$$
$$\boxed{t \approx 7}$$

ניתן גם

$$1.3519 = 1.04^t$$
$$t = \ell og_{1.04} 1.3519$$
$$t = \frac{\ell og 1.33519}{\ell og 1.04} = 7$$

תשובה לאחר 7 שנים, מאז הוספת הכסף, יהיה בתוכנית החיסכון סכום של $39,916$ שקלים.

ג. נמצא לאחר כמה שנים, מזמן הוספת הכסף, יגדל הסכום שבתוכנית פי 3.

למעשה, אין חשיבות לסכום הכסף עצמו – אלא לעובדה שגדל פי שלושה.

$$3M_0 = M_0 \cdot 1.04^t \quad / : M_0$$
$$3 = 1.04^t$$
$$\ell n 3 = \ell n 1.04^t$$
$$\ell n 3 = t \ell n 1.04$$
$$\frac{\ell n 3}{\ell n 1.04} = t$$
$$\boxed{t \approx 28.01}$$

או

$$3 = 1.04^t$$
$$t = \ell og_{1.04} 3$$
$$t = \frac{\ell og 3}{\ell og 1.04} = 28.01$$

תשובה לאחר 28.01 שנים, מאז הוספת הכסף, יגדל הסכום שבתוכנית פי 3.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\ell n\,x-2x^2$ **.**

נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה- ℓn **לא יכולה לקבל מספרים אי-חיוביים.**

תשובה: $x>0$ **.**

ג. נכין טבלת ערכים קטנה, לפני החקירה (תמיד מומלץ).

מסקנה	$f(x)$	x
כאשר $f(x)$ **שואף לאפס מימין, ערכי ה-** y **שואפים לאפס, כלומר הפונקציה שואפת לנקודה** $(0,0)$**, ראשית הצירים.**	$-1.35\cdot10^{-9}$	0.00001
עבור $x\to+\infty$ **מתקיים** $f(x)\to+\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית**	$1.18\cdot10^{13}$	$1,000,000$

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגה.

$$f\,'(x)=2x\ell n\,x+x^2\cdot\frac{1}{x}-4x$$

$$f\,'(x)=2x\ell n\,x+\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}-4x$$

$$\boxed{f\,'(x)=2x\ell n\,x-3x}$$

$$2x\ell n\,x-3x=0$$

$$x(2\ell n\,x-3)=0$$

$$\cancel{x=0}\quad\leftarrow x>0$$

$$2\ell n\,x-3=0$$

$$\ell n\,x=\frac{3}{2}$$

$$x=e^{3/2}$$

$$x=\sqrt{e^3}\quad\to y=(\sqrt{e^3})^2\cdot\ell n(\sqrt{e^3})-2(\sqrt{e^3})^2=e^3\cdot\frac{3}{2}-2e^3\quad\to(\sqrt{e^3},-\frac{e^3}{2})$$

$$\left.\begin{aligned}f\,'(4.4)=2\cdot4.4\ell n\,4.4-3\cdot4.4<0\\ f\,'(4.5)=2\cdot4.5\ell n\,4.5-3\cdot4.5>0\end{aligned}\right\}\boxed{(\sqrt{e^3},-\frac{e^3}{2}),\min}$$

תשובה: $(\sqrt{e^3},-\frac{e^3}{2})$ **, מינימום.**

ג. נמצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x , בה מתקיים $y=0$.

$$0=x^2\ell n\,x-2x^2$$

$$x^2(\ell n\,x-2)=0 \quad /:x^2>0$$

$$\ell n\,x-2=0$$

$$\ell n\,x=2$$

$$x=e^2 \quad \rightarrow \boxed{(e^2,0)}$$

תשובה: $(e^2,0)$ **.**

ד. גרף I יכול להיות הגרף של הפונקציה גרף $f(x)$.

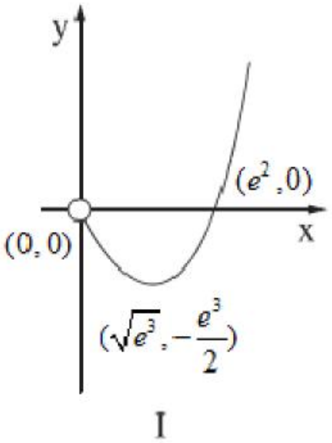
נימוקים:

(1) יוצא מנקודת אי רציפות בראשית הצירים, כלפי מטה - תואם את ההצבה הראשונית שעשינו.

(2) נקודת מינימום ברביע הרביעי, מתאימה.

(3) נקודות חיתוך אחת עם ציר ה- x , מתאימה.

(4) עבור $x\rightarrow+\infty$ מתקיים $f(x)\rightarrow+\infty$ - תואם את ההצבה הראשונית שעשינו.



I

תשובה: גרף I .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2\sqrt{\sin x}$, בתחום $0\le x\le \text{®}$.

ניעזר במידע הקיים על פונקציית ה- $\sin x$, לצורכי חקירה זו.

כי ערכי $f(x)=2\sqrt{\sin x}$ גדולים פי 2 מערכי $\sqrt{\sin x}$ ושומר על הערכים בקצות התחום,

כאשר $\sqrt{\sin x}$ מגדיל את ערכי $\sin x$ כאשר הם $0<y<1$ ושומר על הערכים בקצות התחום.

פונקציית ה- $\sin x$ בתחום $0\le x\le \text{®}$ היא עם שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x : $(0,0)$ ו- $(\text{®},0)$.

אלו יהיו גם שתי נקודות החיתוך של $f(x)=2\sqrt{\sin x}$ עם ציר ה- x ,

שכן עבור $y=0$ ערכי ה- x המתקבלים שווים.

תשובה: $(0,0)$ ו- $(\text{®},0)$.

ב. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון המוחלט של $g(x)$ ואת סוגן.

ערכי פונקציית ה- $\sin x$ בתחום $0\le x\le \text{®}$ הם בתחום $0\le y\le 1$,

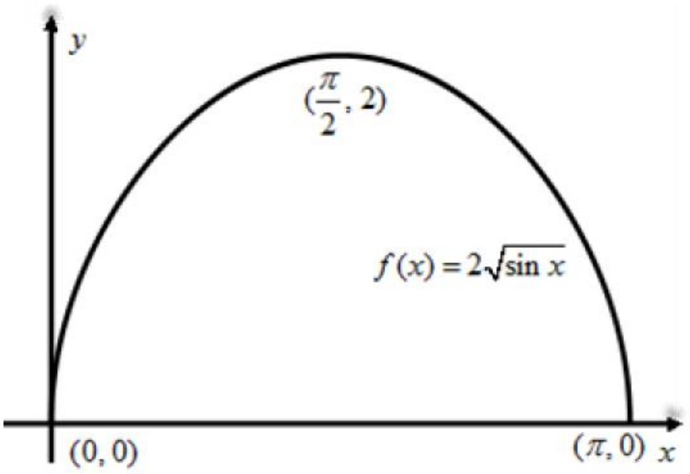
עם מינימום מוחלט בנקודות $(0,0)$ ו- $(\text{®},0)$, ומקסימום מוחלט בנקודה $(\frac{\text{®}}{2},1)$.

ולכן ערכי $f(x)=2\sqrt{\sin x}$ יהיו בתחום $0\le y\le 2$,

עם מינימום מוחלט בנקודות $(0,0)$ ו- $(\text{®},0)$, ומקסימום מוחלט בנקודה $(\frac{\text{®}}{2},2)$.

תשובה: $(0,0)$ ו- $(\text{®},0)$ מינימום מוחלט , $(\frac{\text{®}}{2},2)$ מקסימום מוחלט.

ג. הסרטוט יהיה דומה לזה של הפונקציה $\sin x$ עם מתיחה כלפי מעלה.



ד. על פי סוג נקודות הקיצון, מקסימום, הפנימית של הפונקציה $f(x)=2\sqrt{\sin x}$,

$f'(x)$ מתאפסת עבור $x=\frac{\pi}{2}$, והיא חיובית בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$.

לכן השטח המבוקש הוא מעל ציר ה- x .

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,dx$$

$$S=f(x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$S=f(\frac{\pi}{2})-f(\frac{\pi}{4})=2-2\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{S=0.3182}$$

תשובה: גודל השטח הוא 0.3182 יח"ר.