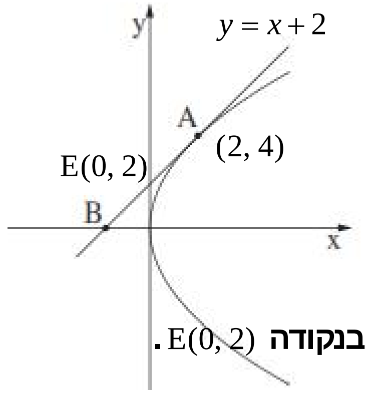
א. הנקודה $A(x_A, y_A)$ **נמצאת על הפרבולה** $y^2 = 2px$ **(** $p > 0$ **פרמטר).**



(1) משוואת משיק לפרבולה, בנקודה שעל הפרבולה, היא: $yy_0 = p(x + x_0)$ **.**

המשיק חותך את ציר ה- x **בנקודה** B **, ולכן** $y_B = 0$ **.**

מכאן ש: $0 \cdot y_A = p(x_B + x_A)$ **, ונקבל ש-** $x_B = -x_A$ **.**

תשובה: הוכַח.

(2) נתון כי משוואת המשיק היא $y = x + 2$ **, כלומר המשיק חותך את ציר ה-** y **בנקודה** $E(0, 2)$ **.**

הראינו כי $x_B = -x_A$ **, ולכן הנקודה** $E(0, 2)$ **היא אמצע הקטע** AB **.**

נקבל ש- $y_A = 4$ **ושיעורי נקודת ההשקה, שעל הישר** $y = x + 2$ **, הם** $A(2, 4)$ **.**

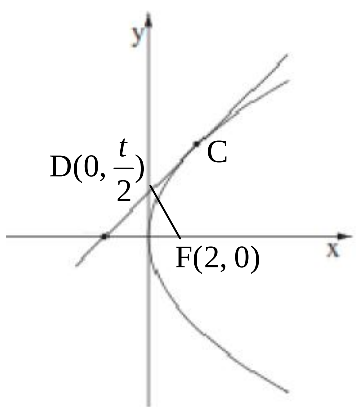
נציב במשוואת הפרבולה: $4^2 = 2p \cdot 2$ **, ומכאן ש-** $p = 4$ **, ומשוואת הפרבולה היא** $y^2 = 8x$ **.**

תשובה: $A(2, 4)$ **,** $y^2 = 8x$.

ב. C **היא נקודה על הפרבולה** $y^2 = 8x$ **, ולכן אם** $y_C = t$ **, הרי ששיעורי הנקודה** D **, שעל ציר ה-** y **, הם** $(0, \frac{t}{2})$ **,**

כי כבר הראינו שנקודה זו היא אמצע הקטע שבין נקודת ההשקה לנקודה שבה המשיק חותך את ציר ה- x **.**

מוקד הפרבולה $y^2 = 8x$ **, שהפרמטר שלה** 4 **, הוא** $F(2, 0)$ **,**



ולכן $m_{FD} = \frac{y_D - y_F}{x_D - x_F} = \frac{\frac{t}{2} - 0}{0 - 2} = -\frac{t}{4}$ **.**

שיפוע המשיק לפרבולה הוא $m_{mashik} = \frac{p}{y_C} = \frac{4}{t}$ **.**

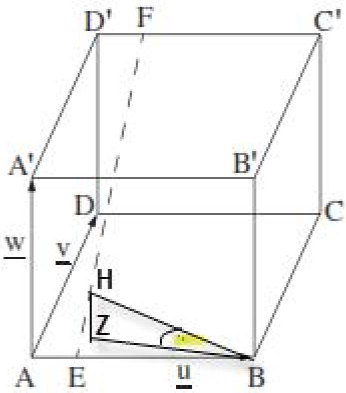
נקבל ש: $m_{mashik} \cdot m_{FD} = \frac{4}{t} \cdot (\frac{t}{4}) = -1$ **ולכן** FD **מאונך למשיק זה.**

תשובה: הוכַח.

א. נתונה תיבה.

נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

בתיבה המקצוע מאונכים זה לזה:



$\underline{u}\perp\underline{w} \rightarrow \underline{u}\cdot\underline{w}=0$

$\underline{v}\perp\underline{w} \rightarrow \underline{v}\cdot\underline{w}=0$

$\underline{v}\perp\underline{u} \rightarrow \underline{u}\cdot\underline{v}=0$

$\overrightarrow{D'F}=t\overrightarrow{D'C'}$

$\boxed{\overrightarrow{D'F}=t\underline{u}}$

$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}$

$\boxed{\overrightarrow{AE}=k\underline{u}}$

נתון כי EF **מקביל למישור הפאה** AA'D'D **, כלומר כל נקודה עליו נמצאת במרחק שווה מהפאה.**

כיוון ש- AE **וגם** D'F **נמצאים על מקצועות המאונכים לפאה, הרי שגם הם מאונכים לפאה,**

והם מרחקים שבין EF **למישור הפאה** AA'D'D **.**

מכאן ש- $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{D'F}$ **ו=** $t=k$**.**

תשובה: הוכח.

ב. נראה כי H **נמצאת על** EF **, כאשר הראינו כבר כי** $t=k$ **.**

$\overrightarrow{EF}=EA+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'F}$

$\overrightarrow{EF}=-t\underline{u}+\underline{w}+\underline{v}+t\underline{u}$

$\boxed{\overrightarrow{EF}=\underline{v}+\underline{w}}$

$\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AC'}$

$\overrightarrow{AH}=t\underline{u}+t\underline{v}+t\underline{w}$

$\overrightarrow{AH}=t\underline{u}+t(\underline{v}+\underline{w})$

$\boxed{\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{EF}}$

ג. נתון כי התיבה היא קובייה, ולכן נסמן $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = a$.

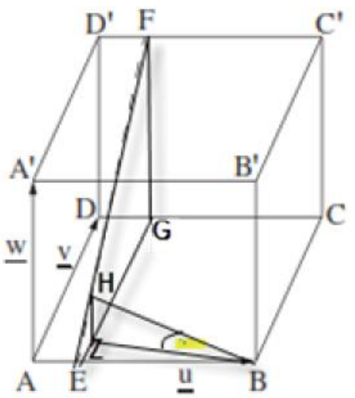
יש לחשב את הזווית בין $\overrightarrow{BH}$ **למישור הבסיס** ABCD **,** $\sphericalangle HBZ$ **, המסומנת בציור בצהוב, הזווית בין המשופע** BH **לבין** BZ **, ההיטל של** BH **לבסיס.**

נשתמש בנוסחה: $\sin\sim = \frac{|\underline{v}\cdot\underline{b}|}{|\underline{v}|\cdot|\underline{b}|}$ **, לחשוב זווית בין ישר למישור.**

הראינו, למעשה, כי H **מחלקת את** EF **ביחס של** $\frac{t}{1-t} = \frac{2}{3}$ **,**

ולכן $\underline{n} = \overrightarrow{ZH} = \frac{2}{5}\underline{w}$ **נמצא על הנורמל הנורמל למישור הבסיס.**

(על פי משפט תאלס $\frac{HZ}{FG} = \frac{EH}{EF} = \frac{2}{5}$ **, כאשר** G **על המקצוע** DC **(** $DZ = D'F$ **)).**



$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EH}$$

$$\overrightarrow{BH} = -\frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}(\underline{v} + \underline{w})$$

$$\boxed{\overrightarrow{BH} = -\frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} + \frac{2}{5}\underline{w}}$$

$$|\overrightarrow{BH}| = \sqrt{(-\frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} + \frac{2}{5}\underline{w})^2} = \sqrt{\frac{9}{25}\underline{u}^2 + \frac{4}{25}\underline{v}^2 + \frac{4}{25}\underline{w}^2}$$

$$|\overrightarrow{BH}| = \sqrt{\frac{9}{25}a^2 + \frac{4}{25}a^2 + \frac{4}{25}a^2} = a\sqrt{\frac{17}{25}}$$

$$|\overrightarrow{ZH}| = \left|\frac{2}{5}\underline{w}\right| = \frac{2}{5}a$$

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{ZH} = (-\frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} + \frac{2}{5}\underline{w})\cdot(\frac{2}{5}\underline{w})$$

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{ZH} = \frac{4}{25}\underline{w}^2 = \frac{4}{25}\cdot a^2$$

$$\sin\sim = \frac{|\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{ZH}|}{|\overrightarrow{BH}|\cdot|\overrightarrow{ZH}|}$$

$$\sin\sim = \frac{\frac{4}{25}\cdot a^2}{a\sqrt{\frac{17}{25}}\cdot\frac{2}{5}a} = \frac{\frac{4}{25}}{\sqrt{\frac{17}{25}}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\boxed{\sim = 29.017^\circ}$$

תשובה: הזווית בין $\overrightarrow{BH}$ **למישור הבסיס** ABCD **היא בת** 29.017° **.**

א. נתונה המשוואה $z^2 = -8 - 8\sqrt{3}\,i$ **.**

נעבור להצגה טריגונומטרית:

$$\tan{}^{-} = \frac{-8\sqrt{3}}{-8} = \sqrt{3}$$
$${}^{-} = 60^\circ + 180^\circ k$$
$${}^{-} = 240^\circ \quad \leftarrow 2nd\ quadrant$$
$$R = \sqrt{(-8\sqrt{3})^2 + (-8)^2} = 16$$
$$z^2 = 16\,cis\,240^\circ$$

שני הפתרונות, על פי נוסחת השורשים של מספרים מרוכבים:

$$z_k = \sqrt[2]{16}\,cis\,(\frac{240^\circ}{2} + \frac{360^\circ K}{2})$$
$$k = 0: \quad z_0 = 4\,cis\,120^\circ = -2 + 2\sqrt{3}\,i \quad (2nd\ quadrant)$$
$$k = 1: \quad z_1 = 4\,cis\,300^\circ = 2 - 2\sqrt{3}\,i$$

תשובה: $-2 + 2\sqrt{3}\,i$ **,** $2 - 2\sqrt{3}\,i$ **.**

פתרון המשוואה שנמצא ברביע השני הוא איבר ראשון בסדרה חשבונית, ולכן $a_1 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ **.**

הפתרון האחר גדול פי 4 **מהפרש הסדרה ולכן** $d = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **.**

סכום שני הפתרונות של נוסחת השורשים הוא כמובן אפס $z_0 + z_1 = 0$ $(-2 + 2\sqrt{3}\,i + 2 - 2\sqrt{3}\,i = 0)$ **.**

כיוון ש- $z_1 = 4d$ **, ו-** $z_0 = a_1$ **, הרי ש-** $a_1 + 4d = 0$ **- ומכאן ש-** $a_5 = 0$ **ו-** $z = 0$ **הוא איבר בסדרה.**

תשובה: הוכַח ש- $z = 0$ **הוא איבר בסדרה, ומקומו הוא החמישי (** $a_5 = 0$ **).**

ג. נתון כי כל איברי הסדרה הם על קו ישר.

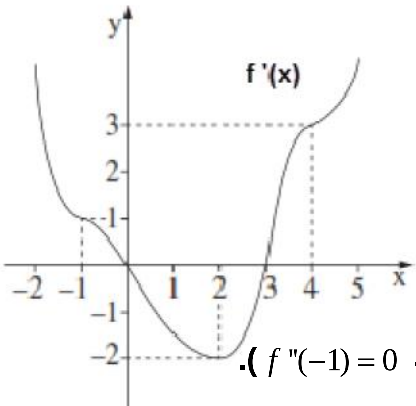
ראינו כי $a_1 = 4\,cis\,120^\circ$ **ו-** $a_5 = 0$ **, כלומר הקו הישר עובר בראשית ושיפועו** $m = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ **.**

תשובה: משוואת הקן הישר היא $y = -\sqrt{3}\,x$ **.**

א. נתון גרף הנגזרת, $f'(x)$, בתחום $-2 \le x \le 5$.

נתונות גם ארבע נקודות, פנימיות, על גרף הפונקציה בתחום זה:

$(-1,a)$ **,** $(0,b)$ **,** $(2,c)$ **,** $(3,d)$ **.**



על פי גרף הנגזרת נתונים גם שלושה ערכים של פונקציית הנגזרת,

המהווים שיפועים של הפונקציה הקדומה $f(x)$:

$f'(-1)=1$ **,** $f'(0)=0$ **,** $f'(2)=-2$ **,** $f'(4)=3$ **.**

(1) על פי הגרף של $f'(x)$, היא יורדת בתחום $-2<x<2$,

ולכן הנגזרת שלה שלילית (או אפס), $f''(x) \le 0$ (ייתכן, על פי הציור ש- $f''(-1)=0$).

מכאן ש $f''(x)$ *לא* משנה סימן בתחום $-2<x<2$ ו- $f(x)$ קעורה כלפי מטה $(\cap)$ בתחום $-2<x<2$.

על פי הגרף של $f'(x)$, היא עולה בתחום $2<x<5$,

ולכן הנגזרת שלה חיובית (או אפס), $f''(x) \ge 0$ (על פי הציור חיובית תמיד).

מכאן ש $f''(x)$ *לא* משנה סימן בתחום $2<x<5$ ו- $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $(\cup)$ בתחום $2<x<5$.

תשובה: $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $(\cup)$ בתחום $2<x<5$, וקעורה כלפי מטה $(\cap)$ בתחום $-2<x<2$.

(2) $f(x)$, משנה תחומי קעירות כאשר $x=2$, ולכן הנקודה $(2,c)$ היא נקודת פיתול שלה.

השיפוע, בנקודה זו, הוא $f'(2)=-2$.

$y-c=-2(x-2)$ **ומשוואת המשיק היא** $y=-2x+4+c$.

תשובה: משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול היא $y=-2x+4+c$.

ב. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f'(x)$ ובין ציר ה- x בתחום $-1 \le x \le 3$,

הוא בחלקו מעל לציר ובחלקו מתחת לציר.

נחשב סכום שטחים אלו בסיוע ערכי הפונקציה הקדומה, הנתונים.

$$S=\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx+\int_{0}^{3} -f'(x)\,dx$$

$$S=f(x)\Big]_{-1}^{0}+(-f(x))\Big]_{0}^{3}$$

$$S=f(0)-f(-1)+(-f(3)-(-f(0)))$$

$$S=f(0)-f(-1)-f(3)+f(0)$$

$$S=b-a-d+b$$

$$\boxed{S=2b-a-d}$$

תשובה: השטח הכלוא הוא $2b-a-d$ יח"ר.

ג. $f'(x)$ **עוברת מחיוביות לשליליות כאשר** $x=0$ **, ולכן** $x=0$ **הוא מקסימום פנימי של** $f(x)$ **ו-** $x_1=0$ **.**

$x=2$ **הוא שיעור ה-** x **של נקודת הפיתול של** $f(x)$ **, על פי תת סעיף א (2), ולכן** $x_2=2$ **.**

נחשב את ערך האינטגרל: $\int_0^2 f'(x)e^{-f(x)}\,dx$ **בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$$\int_0^2 f'(x)e^{-f(x)}\,dx=\int_0^2 -e^{-f(x)}\cdot(-f'(x))\,dx=$$

$$-e^{-f(x)}\Big]_0^2=-e^{-f(2)}-(-e^{-f(0)})=$$

$$-e^{-c}+e^{-b}=\boxed{\frac{1}{e^b}-\frac{1}{e^c}}$$

תשובה: ערך האינטגרל הוא $\frac{1}{e^b}-\frac{1}{e^c}$ **.**

א. נתונות הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\ell n\,x}$ **, ו-** $g(x)=\ell n(\frac{1}{x})$ **.**

תחום ההגדרה של $f(x)=\frac{1}{\ell n\,x}$ **הוא** $x>0,\ x\neq 1$ **,**

כי הביטוי שמקבלת פונקציית ה- ℓn **נדרש להיות חיובי, וכמו כן כאשר** $x=1 \rightarrow \ell n\,x=0$ **המכנה מתאפס.**

תחום ההגדרה של $g(x)=\ell n(\frac{1}{x})$ **הוא** $x>0$ **, כי הביטוי שמקבלת פונקציית ה-** ℓn **נדרש להיות חיובי.**

תשובה: תחום ההגדרה של $f(x)$ **הוא** $x>0,\ x\neq 1$ **, תחום ההגדרה של** $g(x)$ **הוא** $x>0$ **.**

ב. רק לפונקציה $g(x)=\ell n(\frac{1}{x})$ **יש נקודת חיתוך עם ציר ה-** x **, כאשר** $\ell n(\frac{1}{x})=0$ **ומתקיים** $x=1$ **.**

לשתי הפונקציות אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y **, כי** $x=0$ ***לא* בתחום ההגדרה שלהן.**

תשובה: ל- $f(x)$ **אין נקודות חיתוך עם הצירים ול-** $g(x)$ **נקודת חיתוך עם ציר ה-** x **שהיא** $(1,0)$ **.**

ג. נרשום את שתי הפונקציות בצורה נוחה יותר עבור הנגזרות (תחום ההגדרה נשאר *ללא* שינוי).

$f(x)=(\ell n\,x)^{-1}$ **,** $g(x)=\ell n(\frac{1}{x})=\ell n 1-\ell n\,x \rightarrow g(x)=-\ell n\,x$ **.**

נמצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה של $f(x)=(\ell n\,x)^{-1}$ **.**

$$f'(x)=-(\ell n\,x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-1}{x\ell n^2\,x}}$$

המכנה חיובי (לאור תחום ההגדרה) ולכן $f'(x)<0$ **עבור** $x>0,\ x\neq 1$ **,**

והפונקציה יורדת בתחום $x>1$ **או** $0<x<1$ **.**

נמצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה של $g(x)=-\ell n\,x$ **.**

$$\boxed{g'(x)=\frac{-1}{x}}$$

המכנה חיובי (לאור תחום ההגדרה) ולכן $g'(x)<0$ **עבור** $x>0$ **,**

והפונקציה יורדת בתחום $x>0$ **.**

תשובה: $f(x)$ **יורדת בתחום** $x>1$ **או** $0<x<1$ **, עולה *לאף*** x **.**

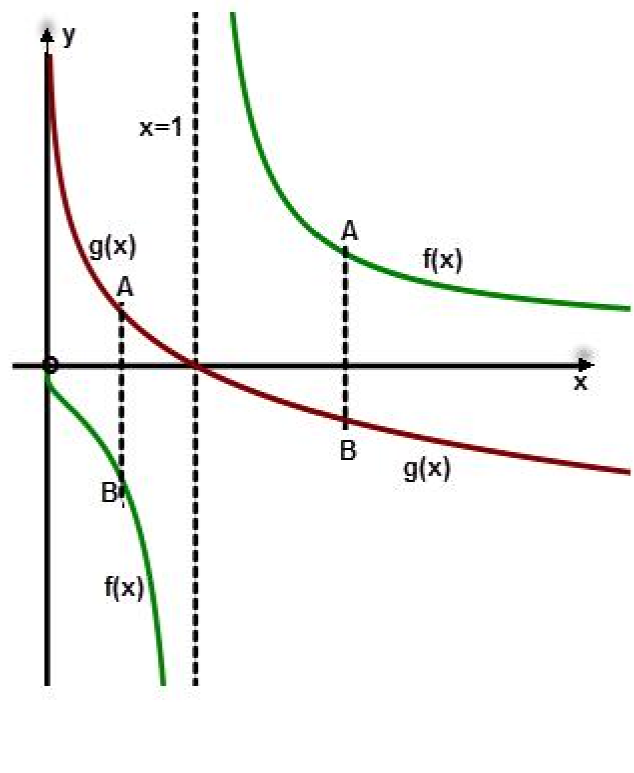
$g(x)$ **יורדת בתחום** $x>0$ **, עולה *לאף*** x **.**

ג. נכין טבלת ערכים קטנה, לפני סרטוט הפונקציות (תמיד מומלץ).

x	$f(x)$	מסקנה
0.0001	-0.086	**כאשר $f(x)$ שואף לאפס מימין, ערכי ה- y שואפים לאפס, כלומר הפונקציה שואפת לנקודה $(0,0)$, ראשית הצירים**
0.999	-9999	**$x=1$ אסימפטוטה אנכית לגרף משמאלה**
1.001	10000	**$x=1$ אסימפטוטה אנכית לגרף מימינה**
1,000,000	0.07	**$y=0$ אסימפטוטה אופקית עבור $x \to +\infty$**

x	$g(x)$	מסקנה
0.000001	16	**$x=0$ אסימפטוטה אנכית לגרף מימינה**
1,000,000	-13	**אין אסימפטוטה אופקית, גרף בירידה מתונה מאוד**

ובהתאם הסקיצות המתאימות, כולל סימון הישרים עבור סעיף ה.



ה. הפונקציה שיש להביא למינימום היא אורך הקטע AB.

הקטע AB מאונך לציר ה- x, ולכן $x_A = x_B$

נשים לב, כי עבור $x > 1$ מתקיים $AB(x) = f(x) - g(x)$, ועבור $0 < x < 1$ מתקיים $AB(x) = g(x) - f(x)$.

עבור $t > 1$:

$$AB(t) = f(t) - g(t)$$
$$AB'(t) = f'(t) - g'(t)$$
$$AB'(t) = \frac{-1}{t\ell n^2 t} - (\frac{-1}{t})$$
$$\boxed{(AB)'(t) = \frac{-1 + \ell n^2 t}{t\ell n^2 t}}$$
$$0 = -1 + \ell n^2 t$$
$$\ell n^2 t = 1$$
$$\ell n\, t = 1 \quad \rightarrow \boxed{t = e} \quad o.k.$$
$$\ell n\, t = -1 \quad \rightarrow \boxed{\cancel{t = \frac{1}{e}}} \quad \leftarrow x > 1$$
$$\left.\begin{matrix} AB'(2) < 0 \\ AB'(4) > 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \min$$
$$AB(e) = f(e) - g(e) = \frac{1}{\ell n e} - \ell n(\frac{1}{e}) = \frac{1}{\ell n e} + \frac{1}{\ell n e} = \frac{2}{\ell n e} = 2$$

עבור $0 < t < 1$ נקבל פונקציה נגדית של אורך הקטע בהשוואה לפונקציה הקודמת, עם תחומי עלייה וירידה הפוכים:

לכן נקבל גם כאן את הפתרונות $t = e$ ו- $t = \frac{1}{e}$.

$$AB(t) = g(t) - f(t)$$
$$\boxed{(AB)'(t) = \frac{1 - \ell n^2 t}{t\ell n^2 t}}$$
$$t = \frac{1}{e} \approx 0.37$$
$$\left.\begin{matrix} AB'(0.2) < 0 \\ AB'(0.4) > 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \min$$
$$AB(\frac{1}{e}) = g(\frac{1}{e}) - f(\frac{1}{e}) = \ell n(\frac{1}{1/e}) - \frac{1}{\ell n(1/e)} = \ell n e + \frac{1}{\ell n e} = 1 + 1 = 2$$

תשובה: $t = e$, או $t = \frac{1}{e}$, עבורם אורך הקטע $AB = 2$ הוא מינימלי.