א. נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-16}=1$ **, כאשר** $a\neq 4$, $a>0$.

המשוואה מייצגת אליפסה (שאינה מעגל) אם מתקיים:

(1) $a^2\neq a^2-16$ **, שהוא כמובן פסוק אמת לכל ערך של** a **.**

(2) $a^2-16>0$ **, שמתקיים עבור** $a>4$ **, או** $a<-4$ **.**

מכאן, עבור $a>0, a\neq 4$ **, שתנאי (2) מתקיים כאשר** $a>4$ **.**

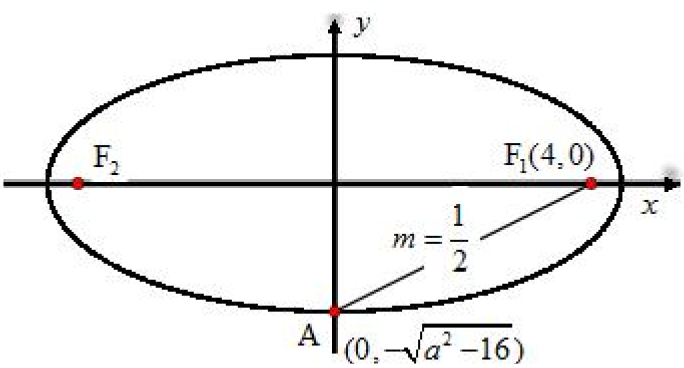
תשובה: $a>4$ **.**

ב. אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-16}=1$ **(כלומר,** $a>4$ **),**

חותכת את הקרן <u>השלילית</u> של ציר ה- y **, בנקודה** $\mathrm{A}(0,-\sqrt{a^2-16})$ **.**

$\mathrm{F_1}(c,0)$ **הוא המוקד הימני, כאשר באליפסה זו מתקיים** $c^2=a^2-(a^2-16)=16$ **, ובהתאם** $\mathrm{F_1}(4,0)$ **.**

הישר $\mathrm{AF_1}$ **יוצר זווית בת** $26.566°$ **עם הכיוון החיובי של ציר ה-** x **, לכן:** $m_{\mathrm{AF_1}}=tg\ 26.566°=\frac{1}{2}$ **.**



$$\frac{1}{2}=\frac{-\sqrt{a^2-16}-0}{0-4}\quad\rightarrow\sqrt{a^2-16}=2$$

$$a^2-16=4\quad\rightarrow a^2=20\quad,\sqrt{-20+16}=2\quad\rightarrow 2=2\ o.k.$$

נציב $a^2=20$ **, ונקבל את משוואת האליפסה** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$ **.**

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$ **.**

ג. כל הנקודות, הנמצאות במרחק שווה מנקודה $\mathrm{F_1}(4,0)$ **, ומישר** $x=-4$ **(העובר במוקד השמאלי** $\mathrm{F_2}(-4,0)$ **),**

נמצאות על פרבולה שהמוקד שלה הוא $\mathrm{F}(4,0)$ **, והמדריך שלה הוא** $x=-4$ **,**

כאשר הפרמטר של הפרבולה הוא 8 **, ובהתאם משוואת המקום הגיאומטרי הוא** $y^2=16x$ **.**

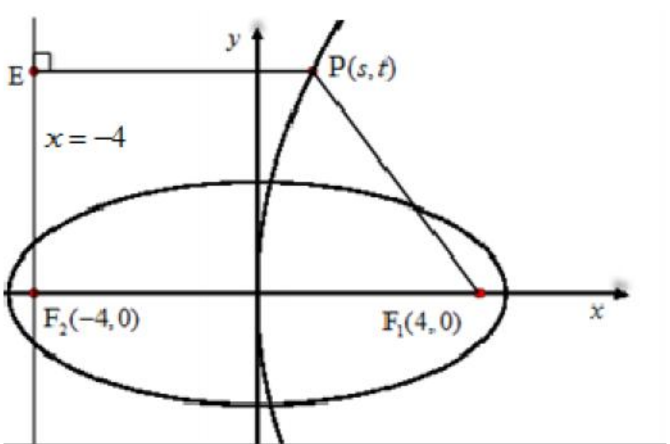
אפשר גם לסמן $\mathrm{P}(s,t)$ **נקודה על המקום הגיאומטרי, עבורה** $\mathrm{PE}=\mathrm{PF_1}$ **.**

$$\sqrt{(s-4)^2+(t-0)^2}=s-(-4)$$

$$(s-4)^2+(t-0)^2=(s+4)^2$$

$$s^2-8s+16+t^2=s^2+8s+16$$

$$t^2=16s\quad\rightarrow\boxed{y^2=16x}$$



תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא $y^2=16x$ **.**

א. (1) $AF \perp ®_{BDC}$ **ולכן** $\overline{AF}$ **מאונך לכל וקטור המוכל במישור הפאה** BDC.

הנקודה P **מונחת על** AF **ולכן** $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BD}$ **ומכאן ש-** $\boxed{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0}$

תשובה: הוכח.

(2) $CH \perp ®_{ABD}$ **ולכן** $\overline{CH}$ **מאונך לכל וקטור המוכל במישור הפאה** ABD.

הנקודה P **מונחת על** CH **ולכן** $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{BD}$ **ומכאן ש-** $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}) \cdot \overrightarrow{BD}$$
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{BD}$$
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0 \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}}$$

תשובה: הוכח.

ב. נראה כי $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BD}$ **, כלומר** $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{BD}$$
$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BD}$$
$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0 \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BD}}$$

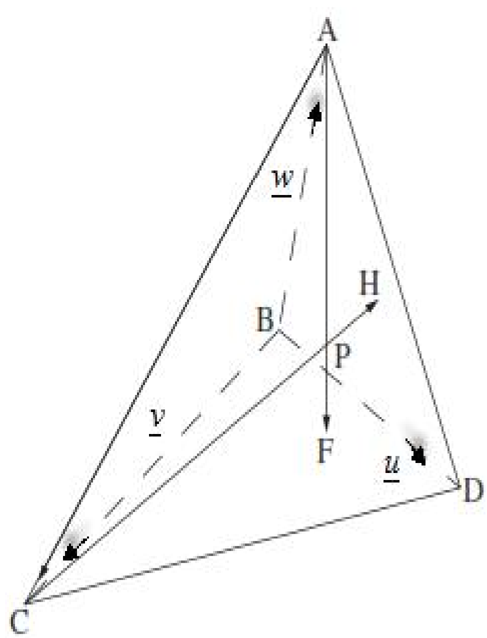
תשובה: הוכח.

ג. נראה שאם $AB = AC$ **אז** $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABD$ **, כלומר** $\cos\sphericalangle CBD = \cos\sphericalangle ABD$ **.**

$$\boxed{\overrightarrow{BD} = \underline{u}} \quad \boxed{\overrightarrow{BC} = \underline{v}} \quad \boxed{\overrightarrow{BA} = \underline{w}}$$

$$AB = AC \quad \rightarrow |\underline{w}| = |\underline{v}|$$

$$\cos\sphericalangle CBD = \cos\sphericalangle ABD$$
$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BC}|\,\cancel{|\overrightarrow{BD}|}} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BA}|\,\cancel{|\overrightarrow{BD}|}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\cancel{|\underline{v}|}} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}}{\cancel{|\underline{w}|}}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad true \quad \leftarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$$



תשובה: הוכח.

א. $z=\cos\sim+i\sin\sim$ **, ולכן** $z=1\,cis\sim$ **.**

$(r>0)$ $|w|=r$ **, ונסמן** $w=r\ cis$ **.**

$z,\ w$ **ברביע הראשון, לכן** $0°<\arg(z),\arg(w)<90°$ **, או** $0°<\sim,\quad <90°$ **.**

$$z=\frac{w}{\overline{w}}$$

$$z=\frac{r\ cis}{r\ cis(-\quad)}=cis2$$

מתקבל ש: $cis\sim=cis2$, **ומכיוון ש-** $0°<\sim,\quad<90°$ **, הרי ש-** $\sim=2$ **(ללא צורך במחזוריות).**

כיוון ש- $0°<\sim<90°$ **, נקבל גם ש-** $0°<\quad<45°$ **.**

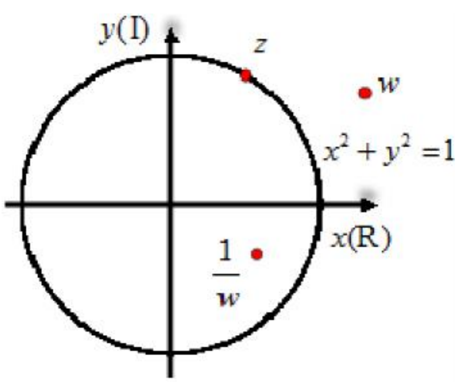
$$w=r\ cis \quad\to\quad \boxed{w=rcis\frac{\sim}{2}}$$

$$\boxed{\overline{w}=rcis(-\frac{\sim}{2})}$$

$$\frac{1}{w}=\frac{cis\ 0°}{rcis\frac{\sim}{2}} \quad\to\quad \boxed{\frac{1}{w}=\frac{1}{r}cis(-\frac{\sim}{2})}$$

תשובה: $w=rcis\frac{\sim}{2}$ **,** $\overline{w}=rcis(-\frac{\sim}{2})$ **,** $\frac{1}{w}=\frac{1}{r}cis(-\frac{\sim}{2})$ **.**

ב. נסרטט את מעגל היחידה, ונמקם את $w=rcis\frac{\sim}{2}$ **ואת** $\frac{1}{w}=\frac{1}{r}cis(-\frac{\sim}{2})$ **(נמקם גם את** $z=1\,cis\sim$ **, כהעשרה).**



עבור $r>1$ **:** $w=rcis\frac{\sim}{2}$ **מחוץ למעגל היחידה, כאשר** $0°<\frac{\sim}{2}<45°$ **.**

$\frac{1}{w}=\frac{1}{r}cis(-\frac{\sim}{2})$ **בתוך מעגל היחידה כי** $\frac{1}{r}<1$ **, כאשר** $-45°<-\frac{\sim}{2}<0°$ **.**

ג. a_n **סדרה הנדסית שבה** $a_1=\frac{1}{w}=\frac{1}{r}cis(-\frac{\sim}{2})$ **ו-** $a_2=z=cis\sim$ **.**

$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{z}{1/w}=zw=cis\sim\cdot rcis\frac{\sim}{2}=rcis\,1.5\sim$ **.**

$a_5=a_2q^3=cis\sim\cdot(rcis\,1.5\sim)^3=cis\sim\cdot r^3\cdot cis\ 4.5\sim=\boxed{r^3cis\ 5.5\sim}$ **(על פי משפט דה-מואבר).**

תשובה: $a_5=r^3cis\ 5.5\sim$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2x-1}\cdot e^{x^2-x}$

הביטוח שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי, לכן $2x-1\geq 0$ **ומכאן ש-** $\boxed{x\geq 0.5}$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\geq 0.5$ **.**

ב. נראה כי הפונקציה עולה לכל x **בתחום ההגדרה שלה.**

$$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}\cdot e^{x^2-x}+\sqrt{2x-1}\cdot(2x-1)\cdot e^{x^2-x} .$$

הנגזרת אינה מוגדרת עבור $x=0.5$ **, אולם עבור** $x>0.5$ **כל אחד מהגורמים חיובי,**

ולכן $f'(x)>0$ **עבור** $x>0.5$ **, וניתן להסיק שהפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה שלה.**

תשובה: הוכַח.

ג. (1) נמצא את משוואת המשיק, בנקודה שבה $x=1$ **.**

$f(1)=\sqrt{2\cdot 1-1}\cdot e^{1^2-1}=1$ **, לכן שיעורי נקודת ההשקה הם** $(1,1)$ **.**

$f'(1)=\frac{2}{2\sqrt{2\cdot 1-1}}\cdot e^{1^2-1}+\sqrt{2\cdot 1-1}\cdot(2\cdot 1-1)\cdot e^{1^2-1}=1+1=2$ **, לכן שיפוע המשיק הוא** 2 **.**

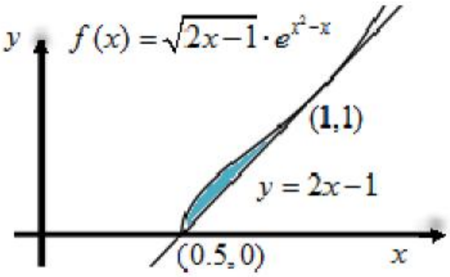
$$y-1=2(x-1)\quad\rightarrow\boxed{y=2x-1}$$

תשובה: משוואת המשיק היא $y=2x-1$ **.**

(2) נתון כי המשיק והפונקציה נחתכים בנקודה אחת , בלבד, נוספת על נקודת ההשקה.

"קל" לזהות שנקודת החיתוך השנייה ביניהם היא $(0.5,0)$,

שהיא נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x ונקודת הקצה של $f(x)$.



(3) נחשב את נפח השטח (הכחול) המסתובב סביב ציר ה- x ,

על ידי חישוב הפרש בין שני נפחים,

ותוך כדי חישוב אינטגרל על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית (המעריך של e).

$$V=\circledR\int_{0.5}^{1}(\sqrt{2x-1}\cdot e^{x^2-x})^2\,dx-\circledR\int_{0.5}^{1}(2x-1)^2\,dx$$

$$V=\circledR\int_{0.5}^{1}((2x-1)\cdot e^{2x^2-2x}-(2x-1)^2)\,dx$$

$$V=\circledR\int_{0.5}^{1}(\frac{1}{2}\cdot e^{2x^2-2x}(4x-2)-(2x-1)^2)\,dx$$

$$V=\circledR(\frac{1}{2}\cdot e^{2x^2-2x}-\frac{(2x-1)^3}{2\cdot 3})\Big]_{0.5}^{1}$$

$$x=1:\quad \circledR(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})=\frac{1}{3}\circledR$$

$$x=0.5:\quad \circledR(\frac{e^{-0.5}}{2}-0)=\frac{1}{2\sqrt{e}}\circledR$$

$$\boxed{V=(\frac{1}{3}-\frac{1}{2\sqrt{e}})\circledR}$$

תשובה: נפח הגוף הוא $0.0945\approx 0.03\circledR\approx(\frac{1}{3}-\frac{1}{2\sqrt{e}})\circledR$ יח"ק.

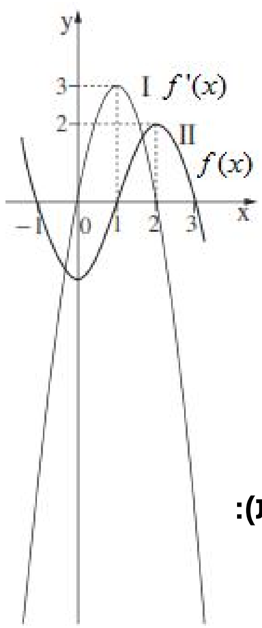
א. שתי הפונקציות, המתוארות על ידי הגרפים, מוגדרות בתחום $-1.1 \le x \le 3.1$.

תחומי החיוביות והשליליות של גרף I הם: חיובי: $0 < x < 2$, שלילי: $2 < x \le 3.1$ או $-1.1 \le x < 0$.

תחומים אלו תואמים את תחומי העלייה והירידה של גרף II (למעט סימני השוויון),

ולכן גרף II הוא הגרף של $f(x)$, בעוד שגרף I מתאר את $f'(x)$.

תשובה: גרף II הוא הגרף של $f(x)$.



ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \ell n\,(f(x))$

(1) הפונקציה $\ell n\,(f(x))$ מוגדרת עבור מספרים חיוביים,

כלומר כאשר $f(x)$ חיובית, ועל פי הציור עבור $1 < x < 3$ או $-1.1 \le x < -1$.

תשובה: תחום ההגדרה של $g(x) = \ell n\,(f(x))$ הוא $1 < x < 3$ או $-1.1 \le x < -1$.

(2) האסימפטוטות האנכיות הן $x = 3$, $x = 1$ ו- $x = -1$, כי (הנימוק *לא* נדרש בבחינת הבגרות):

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \ell n\,(f(x)) = \lim_{x\to 3^-} \ell n\,(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \ell n\,(f(x)) = \lim_{x\to 1^+} \ell n\,(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^-} \ell n\,(f(x)) = \lim_{x\to -1^-} \ell n\,(0^+) = -\infty$$

בסקיצה שנצייר בתת סעיף (5) נביא לידי ביטוי שהגרף שואף לאסימפטוטות כאשר $g(x) \to -\infty$.

תשובה: האסימפטוטות האנכיות הן $x = 3$, $x = 1$ ו- $x = -1$.

(3) נמצא את נקודת הקיצון הפנימית של $g(x) = \ell n\,(f(x))$.

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ .}$$

$f'(x)$ מתאפס, על פי גרף I , עבור $x = 0$, שאינו בתחום ההגדרה של $g(x)$, או $x = 2$.

עבור $x = 2$ הוא עובר מחיובית לשליליות ולכן $x = 2$ הוא מקסימום.

$g(2) = \ell n\,(f(2)) = \ell n\, 2$, על פי הסימונים בסרטוט הנתון.

תשובה: $\max \quad (2, \ell n\, 2)$.

(4) תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$, הם כמו של $f'(x)$ במגבלות תחום ההגדרה.

חיובי: $1 < x < 2$, שלילי: $2 < x < 3$, או $-1.1 < x < -1$, ובהתאם אלו תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

תשובה: $g(x)$ עולה בתחום $1 < x < 2$, ויורדת בתחום $2 < x < 3$, או $-1.1 < x < -1$.

(5) נתון כי הישר $y=1$ **חותך את גרף הפונקציה** $f(x)$ **בשלוש נקודות (ניתן לראות זאת גם בציור הנתון).**

כאשר $f(x)=1$ **מתקבל ש-** $g(x)=\ell n\,(f(x))=\ell n\,(1)=0$ **.**

מכאן שהגרף של $g(x)$ **חותך את ציר ה-** x **בשלוש נקודות בדיוק (מסומנות בחץ בסרטוט הסקיצה).**

על פי הציור הנתון : $1.5<f(-1.1)<2$ **ולכן** $\ell n\,(1.5)<g(-1.1)<\ell n\,(2)$ **.**