א. נסמן ב- x את מהירות המכונית (קמ"ש).

אורך הכביש הראשי בין שתי הערים A ו- B הוא 360 ק"מ, וזה המרחק אותו עברה המכונית בדרך הלוך.

בדרך חזור: המרחק, על דרך העפר, היה 0.6 מהמרחק על הכביש הראשי, כלומר : $0.6\cdot 360=216\,km$ **.**

בדרך חזור: המהירות, על דרך העפר, הייתה קטנה ב- 20% מהדרך הלוך על הכביש הראשי,

כלומר, $\frac{100-20}{100}\cdot x=\frac{80}{100}\cdot x=0.8x$ **.**

$s=vt$ **- המרחק (s) שווה למהירות (v) כפול זמן (t)**

נשלים את הנתונים בטבלה.

	זמן - t שעות	**מהירות - v קמ"ש**	**דרך-מרחק - s ק"מ**
הלוך – כביש ראשי מ- A ל- B	$\frac{360}{x}$	x	360
חזור- דרך עפר מ- B ל- A	$\frac{216}{0.8x}=\frac{270}{x}$	$0.8x$	216

זמן הנסיעה בדרך העפר (חזור) היה קצר בשעה מזמן הנסיעה בכביש הראשי (הלוך).

המשוואה המתאימה היא : $\frac{360}{x}=\frac{270}{x}+1$ **.**

$$\frac{360}{x}=\frac{270}{x}+1 \quad /\cdot x$$

נפתור אותה: $360=270+x$

$$\boxed{90=x}$$

תשובה: מהירות המכונית בנסיעה מעיר A לעיר B היה 90 קמ"ש.

ב. זמן הנסיעה בכביש הראשי היה: $360:90=4\,hours$ **.**

זמן הנסיעה בדרך העפר היה: $270:90=3\,hours$

לכן, הזמן התקצר בשעה מתוך 4 שעות, כלומר ב- $\frac{1}{4}$ **או** 25% **.**

ניתן לפתור גם בדרך הבאה (ללא תלות בתשובה של סעיף א):

$$\frac{\frac{270}{x}}{\frac{360}{x}}=\frac{270x}{360x}=0.75=75\%$$ **, ולכן הזמן התקצר ב-** 25% .

תשובה: זמן הנסיעה בדרך העפר התקצר ב- 25%**, לעומת זמן הנסיעה בכביש הראשי .**

א. מרכז המעגל $M(a,-2a-10)$ נמצא על ציר ה- x , לכן $y_M=0$.

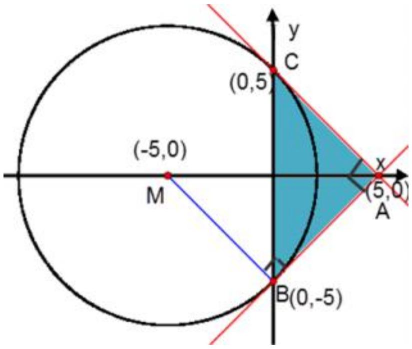
$-2a-10=0 \quad \rightarrow -2a=10 \quad \rightarrow a=-5$ ובהתאם שיעורי מרכז המעגל $(-5,0)$.

הנקודה $B(0,-5)$ נמצאת על המעגל ועל ציר ה- y .

$$R=MB=\sqrt{(-5-0)^2+(0-(-5))^2}=\sqrt{50}$$

תשובה: משוואת המעגל היא $(x+5)^2+y^2=50$.

ב. (1) המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.



$$m_{BM}=\frac{-5-0}{0-(-5)}=\frac{-5}{5}=-1$$

$$m_{BM}\cdot m_{BA}=-1 \quad \leftarrow BM\perp BA$$

$$-1\cdot m_{BA}=-1 \quad \rightarrow m_{BA}=1$$

$$y-(-5)=1(x-0) \quad \rightarrow y=x-5$$

$$0=x-5 \quad \rightarrow x=5 \quad \rightarrow \boxed{A(5,0)}$$

תשובה: $A(5,0)$.

(2) $A(5,0)$, $m=-1$

$$y-0=-1(x-5)$$

$$\boxed{y=-x+5}$$

תשובה: משוואת הישר היא $y=-x+5$.

ג. (1) נציב $x=0$ במשוואת הישר $y=-x+5$ ונקבל $C(0,5)$.

נציב את שיעורי הנקודה במשוואת המעגל.

$$(0+5)^2+5^2\overset{?}{=}50$$

$$50=50 \quad o.k.$$

תשובה: הוכַח כי הנקודה $C(0,5)$ נמצאת על המעגל.

(2) משולש ABC הוא ישר זווית ושווה-שוקיים, כאשר שני ניצביו משיקים למעגל,

כי הנקודה $A(5,0)$ נמצאת על ציר ה- x שהמעגל סימטרי לו וכי מכפלת שיפועי המשיקים -1 .

יחד עם זאת נוח לחשב את שטחו על פי הצלע BC שאורכה $5-(-5)=10$,

והגובה מ- A שמרחקו מראשית הצירים הוא 5 .

$$S_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot h_{BC}}{2}=\frac{10\cdot 5}{2}=25 .$$

תשובה: $S_{\Delta ABC}=25$.

א. נסמן ב- $p(\mathrm{A})$ את ההסתברות שתושב העיר, שנבחר באקראי, תומך בבניית מפעל לייצור כימיקלים.

ההסתברות ששלושת תושבי העיר, שנבחרו באקראי, תומכים בבניית המפעל בעיר היא 0.064 .

$$(p(\mathrm{A}))^3 = 0.064$$

$$\boxed{p(\mathrm{A}) = 0.4}$$

תשובה: 40% מתושבי העיר תומכים בבניית המפעל העיר.

ב. ההסתברות שתושב, שנבחר באקראי, מתנגד להקמת המפעל העיר היא $1-0.4=0.6$.

ההסתברות שמתוך שלושה תושבי העיר, שנבחרו באקראי, לפחות אחד תומך ולפחות אחד מתנגד היא: המאורע המשלים למאורע שיש 3 תומכים או 3 מתנגדים.

$$p = 1-0.4^3-0.6^3$$

$$\boxed{p = 0.72}$$

תשובה: ההסתברות היא 0.72 .

ג. נסמן ב- $p(\mathrm{B})$ את ההסתברות שתושב העיר, שנבחר באקראי, הוא בעל השכלה גבוהה.

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$\mathrm{P(B)} = 0.2 \quad \to \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 0.8$$

$$\mathrm{P(B/A)} = 0.25 \quad \to \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}/\mathrm{A}) = 0.75$$

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$\mathrm{P(B/A)} = \frac{\mathrm{P(B \cap A)}}{\mathrm{P(A)}}$$

$$0.25 = \frac{\mathrm{P(B \cap A)}}{0.4}$$

$$\boxed{\mathrm{P(B \cap A)} = 0.1}$$

<u>נציב בטבלה ונשלים נתונים</u>

	A תומך	$\overline{\mathrm{A}}$ מתנגד	
B - השכלה גבוהה	0.1	0.1	0.2
$\overline{\mathrm{B}}$ - ללא השכלה גבוהה	0.3	0.5	0.8
	0.4	0.6	1

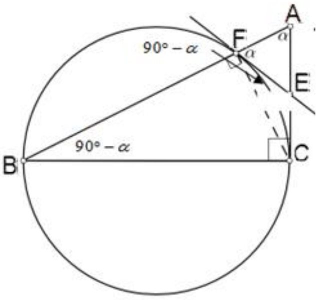
$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}/\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P(B)}} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5 = 50\%$$

תשובה: 50% מהתושבים בעלי ההשכלה הגבוהה מתנגדים לבניית המפעל.

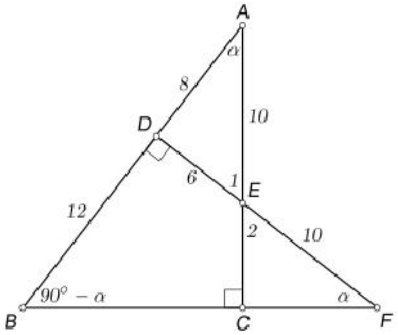
נתונים

1. $\sphericalangle ACB = 90°$ **2.** BC **קוטר** **3.** FE **משיק למעגל ב-** F.

צ"ל: א. FE = EC **. ב.** AE = FE **ג.** $S_{\Delta AEF} = S_{\Delta FCE}$



הסבר		טענה	נימוק
1	4	$\sphericalangle ACB = 90°$	נתון
2	5	BC קוטר	נתון
4, 5	6	EC משיק למעגל ב- C	אם ישר מאונך לקוטר בנקודה שעל המעגל אז הישר משיק למעגל
3	7	FE משיק למעגל ב- F	נתון
6, 7	8	FE = EC	שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה (E) שווים זה לזה
מ.ש.ל. א			
5	9	$\sphericalangle BFC = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
	10	$\sphericalangle AFE = \sim$	סימון
9, 10	11	$\sphericalangle EFC = 90° - \sim$	זווית שטוחה שווה 180°
7, 11	12	$\sphericalangle B = \sphericalangle EFC = 90° - \sim$	זווית בין משיק למיתר
4, 12	13	$\sphericalangle A = \sim$	סכום זוויות ΔFEC 180°
10, 13	14	$\sphericalangle A = \sphericalangle AFE$	כלל המעבר
14	15	AE = FE	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔAFE
מ.ש.ל. ב			
8, 15	16	AE = EC	כלל המעבר
16	17	$S_{\Delta AEF} = S_{\Delta FCE}$	לשני המשולשים גובה משותף, מקדקוד F לצלעות שוות
מ.ש.ל. ג			



נתונים

1. $\sphericalangle ACB = 90°$ **2.** $\sphericalangle FDB = \sphericalangle FDA = 90°$

עבור ב 3. $AD =$ 8 **ס"מ** **4.** $BD =$ 12 **ס"מ** **5.** $AE =$ 10 **ס"מ**

צ"ל: א. $\Delta AED \sim \Delta FBD$ **ב.** FE **ג.** $\Delta AED \cong \Delta EFC$

הסבר		טענה	נימוק
6	**7**	$\sphericalangle A = \sim$	**סימון**
1	**8**	$\sphericalangle ACB = 90°$	**נתון**
7, 8	**9**	$\sphericalangle ABC = 90° - \sim$	**סכום זוויות** $180°$ ΔABC
2	**10**	$\sphericalangle FDB = 90°$	**נתון**
7, 10	**11**	$\sphericalangle F = \sim$	**סכום זוויות** $180°$ ΔBDF
7, 11	**12**	$\sphericalangle A = \sphericalangle F$ **(ז)**	**כלל המעבר**
2	**13**	$\sphericalangle FDB = \sphericalangle FDA = 90°$ **(ז)**	**נתון**
12, 13	**14**	$\Delta AED \sim \Delta FBD$	**משפט דמיון זווית זווית**
		מ.ש.ל. א	
14	**15**	$\frac{AE}{FB} = \frac{ED}{BD} = \frac{AD}{FD}$	**יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים**
3	**16**	$AD =$ 8 **ס"מ**	**נתון**
4	**17**	$BD =$ 12 **ס"מ**	**נתון**
5	**18**	$AE =$ 10 **ס"מ**	**נתון**
13, 16, 18	**19**	$ED =$ 6 **ס"מ**	**משפט פיתגורס** ΔAED **:** $ED = \sqrt{10^2 - 8^2}$
15, 16, 18, 19	**20**	$\frac{6}{12} = \frac{8}{FD}$	**הצבה**
20	**21**	$FD =$ 16 **ס"מ**	**חישוב**
19, 21	**22**	$FE =$ 10 **ס"מ**	**הפרש קטעים**
		מ.ש.ל. ב.	
18, 22	**23**	$AE = FE$ **(צ)**	**כלל המעבר**
	24	$\sphericalangle AED = \sphericalangle FEC$ **(ז)**	**זוויות קדקודיות שוות זו לזו**
12, 23, 24	**25**	$\Delta AED \cong \Delta FEC$	**משפט חפיפה זווית צלע זווית**
		מ.ש.ל. ג	

א. $ABCD$ **טרפז,** $AB \parallel DC$ **,** $AE \parallel BC$ **(נתון), ולכן** $ABCE$ **מקבילית (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות).**

$AB = 5$ **ס"מ (נתון) ובהתאם גם** $EC = 5$ **ס"מ (צלעות נגדיות שוות במקבילית).**

$CD = 12$ **ס"מ (נתון) ובהתאם** $DE = 7$ **ס"מ (הפרש קטעים).**

$BC = 6$ **ס"מ (נתון) ובהתאם גם** $AE = 6$ **ס"מ (צלעות נגדיות שוות במקבילית).**

$AD = 9$ **ס"מ (נתון)**

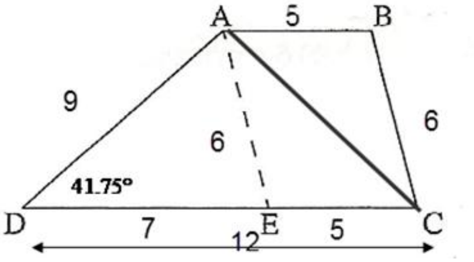
(1) נמצא את $\sphericalangle ADC$ **במשולש** ADE **, באמצעות משפט הקוסינוסים.**

$$(AE)^2 = (DA)^2 + (DE)^2 - 2DA \cdot DE \cdot \cos \sphericalangle ADC$$
$$6^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \cos \sphericalangle ADC$$
$$126 \cdot \cos \sphericalangle ADC = 94$$
$$\boxed{\sphericalangle ADC = 41.75°}$$

תשובה: $\sphericalangle ADC = 41.75°$.

(2) $\underline{\Delta ADC}$

$$S_{\Delta ADC} = \frac{AD \cdot CD \cdot \sin\sphericalangle ADC}{2}$$
$$S_{\Delta ADC} = \frac{9 \cdot 12 \cdot \sin 41.75°}{2}$$
$$\boxed{S_{\Delta ADC} = 35.96\,cm^2}$$



תשובה: $S_{\Delta ADC} = 35.96$ **סמ"ר** .

ב. נמצא את AC **במשולש** ADC **, באמצעות משפט הקוסינוסים.**

$$(AC)^2 = (DA)^2 + (DC)^2 - 2DA \cdot DC \cdot \cos \sphericalangle ADC$$
$$(AC)^2 = 9^2 + 12^2 - 2 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \cos 41.75°$$
$$AC = 7.99\,cm$$

נמצא את רדיוס המעגל החוסם את משולש ADC **, באמצעות משפט הסינוסים במשולש זה.**

$$\frac{AC}{\sin \sphericalangle ADC} = 2R$$
$$\frac{7.99}{2 \cdot \sin 41.75°} = R$$
$$\boxed{R = 6\,cm}$$

תשובה: רדיוס המעגל החוסם את משולש ADC **הוא** 6 **ס"מ.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2}{(x-2)^2}$.

(1) תחום ההגדרה, ביטוי במכנה שונה מאפס.

תשובה: $x\neq 2$.

(2) ארבע הצבות קצרות במחשבון, להתמצאות מיטבית בחקירה (מומלץ, לאחר מציאת תחום הגדרה)

$f(100)=1.992\to 2$, $f(-1000)=2.008\to 2$ **, מסקנה:** $y=2$ **אסימפטוטה אופקית.**

$f(2.01)=80,802\to+\infty$, $f(1.99)=79,203\to+\infty$ **, מסקנה:** $x=2$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=2$ **אסימפטוטה מקבילה לציר ה-** x **,** $x=2$ **אסימפטוטה מקבילה לציר ה-** y **.**

(3) נמצא את נקודת הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגה.

$$f'(x)=\frac{4x(x-2)^2-2x^2\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$f'(x)=\frac{4x(x-2)(x-2-x)}{(x-2)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-8x(x-2)}{(x-2)^4}}$$

$$0=\frac{-8x(x-2)}{(x-2)^4}$$

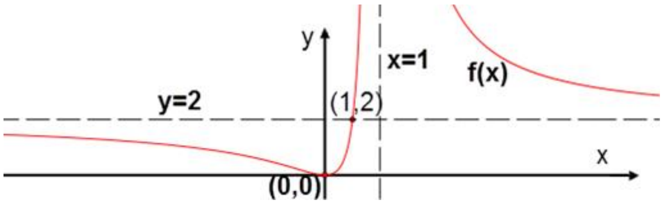
$$x=0\quad\to y=\frac{2\cdot 0^2}{(0-2)^2}=0\quad\to\boxed{(0,0),\ \text{Min}}\quad\leftarrow f(x)\ is\ non-negative\ \ function$$

$$\cancel{x=2}$$

סוג הקיצון נקבע בהתאם לכך שערכי הפונקציה אינם שליליים ולכן 0 **הוא הערך המינימלי.**

$x=2$ **אינו בתחום ההגדרה של הפונקציה.**

תשובה: $(0,0)$ **מינימום.**



ב. סרטוט הפונקציה משמאל.

ג. (1) נמצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם אסימפטוטה האופקית

$$2=\frac{2x^2}{(x-2)^2}$$

$$(x-2)^2=x^2$$

$$x-2=x\qquad\qquad x-2=-x$$

$$\cancel{-2=0}\qquad\qquad x=1\quad\to\boxed{(1,2)}$$

תשובה: נקודת החיתוך היא $(1,2)$ **.**

(2)תשובה: $x<1$ **, על פי גרף הפונקציה שבסרטוט.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x+1}}$ **בתחום** $x>-1$.

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ובהתאם:** $f(0)=\frac{4}{\sqrt{0+1}}=4$.

תשובה: $\mathrm{A}(0,4)$.

(2) נמצא את משוואת המשיק ואת שיעורי הנקודה B .

נקודת ההשקה: $\mathrm{A}(0,4)$.

שיפוע המשיק: $f'(\mathrm{x})=\frac{-\frac{4}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}\quad ,m(x=0)=\frac{-2}{1}=-2$

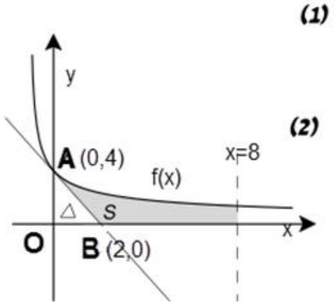
משוואת המשיק: $y-4=-2(x-0)\quad\rightarrow\boxed{y=-2x+4}$

נמצאת שיעור ה- x **של הנקודה** B **, כאשר** $y_{\mathrm{B}}=0$ **:** $0=-2x+4\quad\rightarrow 2x=4\quad\rightarrow x=2$.

תשובה: שיעורי הנקודה B **הם** $(2,0)$ **ומשוואת המשיק היא** $y=-2x+4$.

ב. נחשב את השטח שבין הפונקציה, הצירים והישר $x=8$ **,**

ונחסר ממנו את שטח $\Delta\mathrm{ABO}$ **שבין המשיק והצירים.**



$$S_{\Delta\mathrm{ABO}}=\frac{(2-0)\cdot(4-0)}{2}=4\ .$$

את $S+S_{\Delta\mathrm{ABO}}$ **נחשב בעזרת אינטגרל.**

$$S+S_{\Delta\mathrm{ABO}}=\int_0^8\left(\frac{4}{\sqrt{x+1}}-0\right)dx$$

$$S+S_{\Delta\mathrm{ABO}}=4\cdot2\sqrt{x+1}\Big]_0^8$$

$$S+S_{\Delta\mathrm{ABO}}=(8\cdot\sqrt{8+1})-(8\cdot\sqrt{0+1})$$

$$S+S_{\Delta\mathrm{ABO}}=(24)-(8)$$

$$\boxed{S+S_{\Delta\mathrm{ABO}}=16}$$

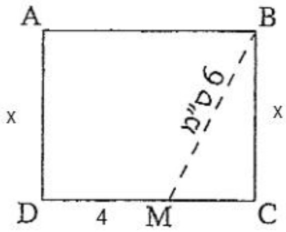
ובהתאם: $S=16-4=12$

תשובה: $S=12$ **.**

א. כיוון ש- ABCD מלבן, הרי שהצלעות הנגדיות שוות זו לזו, וזוויותיו ישרות.

הפונקציה שיש להביא *למקסימום* **היא** *סכום הצלעות* AD **ו-** DC .

נסמן $AD = x$ **ובהתאם** $BC = x$ **ו-** $MC = \sqrt{36-x^2}$ **, על פי משפט פיתגורס ב-** ΔBMC **.**



$$\boxed{f(x) = x + 4 + \sqrt{36-x^2}}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\sqrt{36-x^2} - x}{\sqrt{36-x^2}}}$$

$$0 = \sqrt{36-x^2} - x$$

$$\sqrt{36-x^2} = x$$

$$36 - x^2 = x^2$$

$$x^2 = \sqrt{18}$$

$$x = \sqrt{18} \quad (x>0) \quad \rightarrow 0 \overset{?}{=} \sqrt{36-18} - \sqrt{18} \quad \rightarrow \quad 0 = 0 \quad o.k.$$

תשובה: אורך הצלע AD **, עבורה סכום אורכי הצלעות** AD **ו-** DC **מקסימלי, הוא** $\sqrt{18}$ **ס"מ .**

ב. נציב $x = \sqrt{18}$ **ב-** $f(x)$ **.**

$$f(\sqrt{18}) = \sqrt{18} + 4 + \sqrt{36-\sqrt{18}^{2}}$$

$$f(\sqrt{18}) = \sqrt{18} + 4 + \sqrt{18}$$

$$f(\sqrt{18}) = 2\sqrt{18} + 4 = 12.49\ cm$$

תשובה: הסכום המקסימלי של אורכי הצלעות AD **ו-** DC **הוא** 12.49 **ס"מ .**