א. x **מייצג את מהירות הנסיעה של דן בבוקר (בדרכו מעיר** A **לעיר** B**).**

בערב חזר דן במהירות הקטנה ב- 10% **מהמהירות שנסע בה בבוקר, כלומר** $0.9x = x \cdot \frac{100-10}{100}$ **.**

המרחק מ מעיר A **לעיר** B **הוא** 135 **ק"מ.**

נשלים את הנתונים בטבלה.

מסלול	זמן t שעות	מהירות v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
בוקר - מעיר A לעיר B	$\frac{135}{x}$	x	135
ערב - מעיר B לעיר A	$\frac{135}{0.9x}$	$0.9x$	135

זמן הנסיעה בערב היה ארוך ב- 10 **דקות, כלומר ב-** $\frac{1}{6}$ **שעה** $= \frac{10}{60}$ **מזמן הנסיעה בבוקר.**

לכן, המשוואה המתאימה: $\frac{135}{x} + \frac{1}{6} = \frac{135}{0.9x}$

נפתור את המשוואה:

$$\overset{/6\cdot 0.9}{\frac{135}{x}} + \overset{/\cdot 0.9x}{\frac{1}{6}} = \overset{/\cdot 6}{\frac{135}{0.9x}} \quad / \cdot 0.9 \cdot 6x$$

$$729 + 0.9x = 810$$

$$0.9x = 81 \quad / : 0.9$$

$$\boxed{x = 90}$$

תשובה: מהירות הנסיעה של דן בבוקר הייתה 90 **קמ"ש.**

ב. מהירות הנסיעה של דן בערב (בדרכו מעיר B **לעיר** A **) הייתה** 81 **קמ"ש** $= 0.9 \cdot 90$ **.**

זמן הנסיעה היה $1\frac{2}{3}$ **שעות** $= \frac{135}{81}$ **, כלומר שעה וארבעים דקות.**

דן יצא מעיר B **בשעה** $19:00$**, ולכן יגיע בשעה** $20:40$ **.**

תשובה: דן יגיע לעיר A **בשעה** $20:40$ **.**

א. נציב $x=5$ **, במשוואת המעגל** $x^2+y^2=125$ **(שמרכזו** $O(0,0)$ **ורדיוסו** $\sqrt{125}$**)**

$$5^2+y^2=125 \quad \rightarrow y^2=100 \quad \rightarrow y=\pm 10$$

תשובה: $A(5,10)$ **,** $B(5,-10)$**.**

ב. נמצא את משוואת הקוטר AC **, באמצעות שתי נקודות שעליו:** $A(5,10)$ **,** $O(0,0)$**.**

$m_{AC}=\frac{10-0}{5-0}=2$ **ובהתאם:** $\boxed{y=2x} \leftarrow y-0=-2(x-0)$ **.**

תשובה: משוואת הישר, שעליו מונח הקוטר AC **, היא** $y=2x$ **.**

ג. הרדיוס OC **מאונך למשיק בנקודת ההשקה** C **, כאשר שיפוע הרדיוס הוא** 2 **.**

ולכן על פי תנאי ניצבות $2\cdot m_{CD}=-1 \quad \rightarrow m_{CD}=-\frac{1}{2}$ **.**

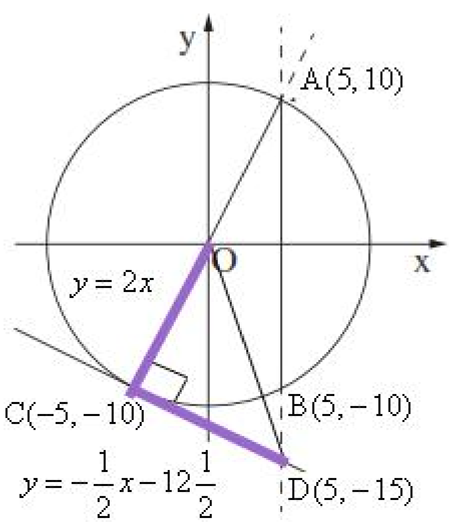
נמצא את שיעורי הנקודה C **, כאשר** $O(0,0)$ **היא אמצע הקוטר ושיעורי** $A(5,10)$ **.**

$$\left.\begin{array}{ll} 0=\frac{5+x_C}{2} & 0=\frac{10+y_C}{2} \\ 0=5+x_C & 0=10+y_C \\ x_C=-5 & y_C=-10 \end{array}\right\} C(-5,-10)$$

$$y-(-10)=-\frac{1}{2}(x-(-5)) \quad \rightarrow y+10=-\frac{1}{2}(x+5)$$

$$y+10=-\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2} \quad \rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{2}x-12\frac{1}{2}}$$

תשובה: משוואת המשיק היא $y=-\frac{1}{2}x-12\frac{1}{2}$ **.**



ד. המשיק $y=-\frac{1}{2}x-12\frac{1}{2}$ **חותך את הישר** $x=5$ **בנקודה** D**.**

נציב $x=5$ **במשוואת המשיק:**

$$y=-\frac{1}{2}\cdot 5-12\frac{1}{2} \quad \rightarrow y=-15 \quad \rightarrow D(5,-15)$$

$$DC=\sqrt{(5-(-5))^2+(-15-(-10))^2}=\sqrt{125}$$

תשובה:אורך הקטע CD **הוא** $\sqrt{125}$ **.**

ה. משולש OCD **הוא ישר זווית, כי** $\sphericalangle OCD=90^\circ$ **(הרדיוס מאונך למשיק, ראה סעיף ג.)**

$$OC=R=\sqrt{125}$$

לכן $OC=DC$ **והמשולש שווה שוקיים.**

תשובה: הוכַח.

א. נתונה הפונקציה $y=x^2-4\sqrt{x}$ **.**

תחום ההגדרה: $x\ge 0$ **(ביטוי בתוך השורש הריבועי חייב להיות אי-שלילי)**

תשובה: $x\ge 0$ **.**

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית ואת סוגה.

$$y'=2x-\frac{4}{2\sqrt{x}}$$
$$0=2x-\frac{4}{2\sqrt{x}} \quad /\cdot 2\sqrt{x}$$
$$0=4x\sqrt{x}-4$$
$$4=4x\sqrt{x} \quad /:4$$
$$1=x\sqrt{x}$$
$$(1)^2=(x\sqrt{x})^2$$
$$1=x^2\cdot x$$
$$1=x^3$$
$$x=1 \quad \rightarrow \quad y=1^2-4\sqrt{1}=-3 \quad \rightarrow (1,-3)$$

(כיוון שהעלינו בריבוע שני אגפים, נבדוק שהפתרון נכון : $1=1\sqrt{1} \quad \rightarrow 1=1 \quad o.k.$ **).**

והנקודה החשודה כקיצון, היא $(1,-3)$ **.**

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון:

$$f'(0.5)=2\cdot 1-\frac{4}{2\sqrt{0.5}}=-0.8<0, \quad f'(2)=2\cdot 2-\frac{4}{2\sqrt{2}}=2.6>0$$

0	0.5	1	2	x
	-	0	+	y'
	↘	Min	↗	מסקנה

בנקודה שבה $x=1$ **עוברים מירידה לעלייה ולכן זו נקודת מינימום.**

תשובה: $(1,-3)$ **מינימום .**

ג. תחומי עלייה וירידה, על פי הטבלה בסעיף הקודם:

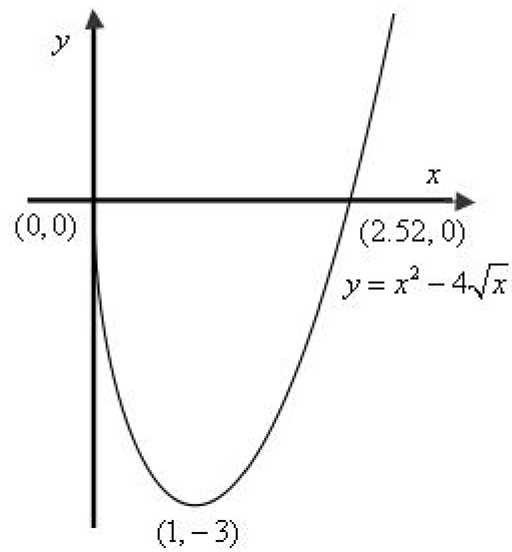
תשובה: עלייה: $x>1$ **ירידה:** $0<x<1$ **.**

ד. בנקודת החיתוך עם ציר y **מתקיים** $x=0$ **ובהתאם** $f(0)=0^2-4\sqrt{0}=0$ **ולכן** $(0,0)$ **.**

תשובה: $(0,0)$ **.**

ה. הסקיצה המתאימה, לפי נקודת הקיצון ($(1,-3)$ מינימום),

שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים ($(0,0)$, $(2.52,0)$) ותחום ההגדרה.



א. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $\boxed{f(x)=-4x^3+6x^2}$ ואת סוגן.

$$\boxed{f'(x)=-12x^2+12x}$$

$0=-12x^2+12x$

$0=12x(-x+1)$

$x_1=0 \quad \to (0,0) \quad \leftarrow y=-4\cdot 0^3+6\cdot 0^2=0$

$x_2=1 \quad \to (1,2) \quad \leftarrow y=-4\cdot 1+6\cdot 1^2=2$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון

$f'(-1)=-12\cdot(-1)^2+12\cdot(-1)=-24<0$

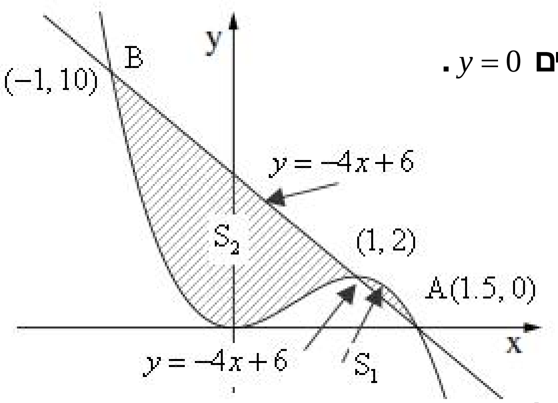
$f'(0.5)=-12\cdot 0.5^2+12\cdot 0.5=3>0$

$f'(2)=-12\cdot 2^2+12\cdot 2=-24<0$

-1	0	0.5	1	2	x
-	0	+	0	-	y'
↘	**Min**	↗	**Max**	↘	**מסקנה**

ב- $x=0$ עוברים מירידה לעלייה ולכן מינימום , ב- $x=1$ עוברים מעלייה לירידה ולכן מקסימום.

תשובה: $(0,0)$ **מינימום ,** $(1,2)$ **מקסימום.**



ב. נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x בה מתקיים $y=0$.

$0=-4x^3+6x^2$

$0=2x^2(-2x+3)$

$x_1=0 \quad \to (0,0)$

$-2x+3=0 \quad \to -2x=-3 \quad \to x_2=1.5 \quad \to \boxed{A(1.5,0)}$

תשובה: $A(1.5,0)$ **.**

ג. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה והישר $y=-4x+6$ מפוצל לשני חלקים, S_1 ו- S_2.

S_1 **- הפרש פונקציות:** $-4x^3+6x^2-(-4x+6)=-4x^3+6x^2+4x-6$ **.**

$$S_1=\int_1^{1.5}(-4x^3+6x^2+4x-6)\,dx$$

$$S_1=\frac{-4x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-6x\Big]_1^{1.5}$$

$$S_1=(-1.5^4+2\cdot 1.5^3+2\cdot 1.5^2-6\cdot 1.5)-(-1^4+2\cdot 1^3+2\cdot 1^2-6\cdot 1)$$

$$S_1=-2\frac{13}{16}-(-3)$$

$$S_1=\frac{3}{16}$$

S_2 - הפרש פונקציות: $-4x+6-(-4x^3+6x^2)=-4x+6+4x^3-6x^2$.

$$S_2=\int_{-1}^{1}(-4x+6+4x^3-6x^2)\,dx$$

$$S_2=-\frac{4x^2}{2}+6x+\frac{4x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}\Big]_{-1}^{1}$$

$$S_2=(-2\cdot1^2+6\cdot1+1^4-2\cdot1^3)-(-2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+(-1)^4-2\cdot(-1)^3)$$

$$S_2=3-(-5)$$

$$S_2=8$$

ולכן סכום השטחים הוא: $\frac{3}{16}+8=8\frac{3}{16}$

תשובה: גודל השטח הוא $8\frac{3}{16}$ **יח"ר .**

א. נתון כי $x, z > 0$ **כאשר** $x \cdot z = 48$ **, כלומר** $z = \frac{48}{x}$

הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *הסכום* $x + 3z$ **.**

$$f(x) = x + 3 \cdot \frac{48}{x}$$

$$\boxed{f(x) = x + \frac{144}{x}}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{144}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 144}{x^2}}$$

$$0 = \frac{x^2 - 144}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$0 = x^2 - 144$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12 \quad \leftarrow x > 0$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)

$$f'(11) = 11^2 - 144 < 0, \quad f'(13) = 13^2 - 144 > 0$$

x	13	12	11	0
y'	+	0	-	
מסקנה	↗	Min	↘	

ב- $x = 12$ **עוברים מירידה לעלייה ולכן מינימום , כאשר** $z = \frac{48}{12} = 4$

תשובה: $x = 12, z = 4$ **, עבורם הסכום** $x + 3z$ **הוא מינימלי.**

ב. הסכום המינימלי הוא $12 + 3 \cdot 4 = 24$

תשובה: הסכום המינימלי הוא 24 **.**

6 למבחן מותאם בלבד

נתונה הפונקציה $f(x)=ax-\frac{9}{x}$

א. נתון כי $f'(1)=12$

$$f'(x)=a+\frac{9}{x^2}$$

$$12=a+\frac{9}{1^2}$$

$$\boxed{a=3}$$

תשובה: $a=3$.

נציב $a=3$ **ונקבל** $\boxed{f(x)=3x-\frac{9}{x}}$

ב. הישר $y=6$ **חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.**

נציב $y=6$ **בפונקציה:**

$$6=3x-\frac{9}{x} \quad /\cdot x$$

$$6x=3x^2-9 \quad \rightarrow 0=3x^2-6x-9$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm12}{6}$$

$$x_1=\frac{6+12}{6}=\frac{18}{6}=3 \quad \rightarrow \boxed{(3,6)}$$

$$x_2=\frac{6-12}{6}=\frac{-6}{6}=-1 \quad \rightarrow \boxed{(-1,6)}$$

תשובה: $(3,6)$, $(-1,6)$.

ג. נמצא את משוואות המשיקים

$$\boxed{f'(x)=3+\frac{9}{x^2}}$$

$$f'(3)=3+\frac{9}{3^2}=4 \quad \rightarrow y-6=4(x-3) \quad \rightarrow y-6=4x-12 \quad \rightarrow \boxed{y=4x-6}$$

$$f'(-1)=3+\frac{9}{(-1)^2}=12 \quad \rightarrow y-6=12(x-(-1)) \quad \rightarrow y-6=12x+12 \quad \rightarrow \boxed{y=12x+18}$$

תשובה: $y=4x-6$, $y=12x+18$

ג. נמצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים

$$\begin{cases} y = 4x - 6 \\ y = 12x + 18 \end{cases}$$

$$4x - 6 = 12x + 18$$

$$-8x = 24 \quad / : (-8)$$

$$\left.\begin{aligned} &x = -3 \\ &y = 4 \cdot (-3) - 6 = -18 \end{aligned}\right\} \boxed{(-3, -18)}$$

תשובה: $(-3, -18)$.