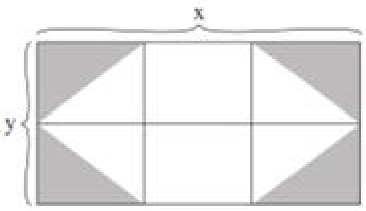


א. (1) נשים לב ששטח של משולש אפור מהווה מחצית משטח מלבן הפינתי.
כלומר שטח ארבעת השטחים האפורים שווה לשטח שני מלבנים,
שליש מהשטח הכולל.

שטח הגינה הוא xy **, ולכן שטח הגינה שרוצף באבן אפורה הוא** $\frac{xy}{3}$ **מ"ר.**

תשובה: שטח הגינה שרוצף באבן אפורה הוא $\frac{xy}{3}$ **מ"ר.**

(2) שטח הגינה שרוצף באבן לבנה הוא $\frac{2xy}{3}$ **מ"ר** $xy-\frac{xy}{3}=$ **.**

ב. המחיר למ"ר ריצוף באבן האפורה הוא 75 **שקלים. לכן, עלות ריצוף מסוג זה היא** $25xy$ **שקלים** $75\cdot\frac{xy}{3}=$ **.**

המחיר למ"ר ריצוף באבן לבנה הוא 60 **שקלים. לכן, עלות ריצוף מסוג זה היא** $40xy$ **שקלים** $60\cdot\frac{2xy}{3}=$ **.**

עלות הריצוף לכל הגינה היא 1,170 **שקלים. לכן,** $25xy+40xy=1170$ **.**

$$65xy=1170$$
$$xy=18$$

הצלע הארוכה של הגינה ארוכה ב- 3 **מטרים מן הצלע האחרת שלה . מכאן ש-** $x=y+3$ **.**

$$\begin{cases} xy=18 \\ x=y+3 \end{cases}$$
$$y(y+3)=18$$
$$y^2+3y-18=0$$
$$y=3 \quad o.k. \quad \rightarrow x=6$$
$$\xcancel{y=-6} \quad y>0$$

תשובה: אורכי צלעות הגינה הם: 3 **מטרים ו-** 6 **מטרים.**

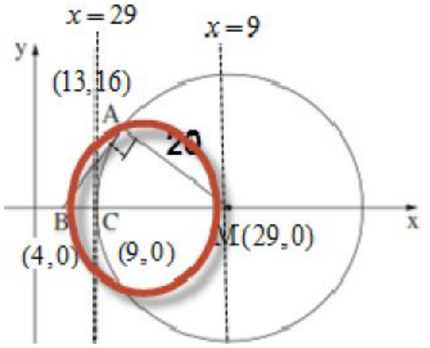
א. מרכז המעגל $M(x,0)$ **במרחק** 20 **(רדיוס) מהנקודה** $A(13,16)$ **שעל המעגל.**

$$20 = \sqrt{(x-13)^2 + (0-16)^2}$$
$$400 = (x-13)^2 + 256$$
$$144 = (x-13)^2$$
$$12 = x-13 \quad \rightarrow x = 25\ o.k. \quad \leftarrow x > 0$$
$$-12 = x-13 \quad \rightarrow x = -25\ fault$$

הפתרון השני נפסל, כי נתון שמרכז המעגל נמצא על החלק החיובי של ציר ה- x **.**

תשובה: $M(29,0)$ **.**

ב. נמצא את שיפוע הרדיוס AM **, ובהתאם את שיפוע המשיק** AB **, המאונך לו.**



$$m_{AM} = \frac{12-0}{13-29} = \frac{12}{-16} = -\frac{3}{4} \rightarrow m_{AB} = \frac{4}{3} \quad \leftarrow m_{AB} \cdot m_{AM} = -1$$
$$\frac{4}{3} = \frac{12-0}{13-x_B}$$
$$13 - x_B = 9$$
$$x_B = 4 \quad \rightarrow \boxed{B(4,0)}$$

תשובה: $B(4,0)$.

ג. ΔBAM **ישר זווית (**$\measuredangle A = 90°$**), לכן** BM **הוא הקוטר, ונקודת האמצע שלו היא מרכז המעגל החוסם.**

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{4+29}{2} = \frac{33}{2} = 16.5 \\ y = 0 \end{array}\right\} (16,0)$$
$$R = 16.5 - 0 = 12.5$$
$$\boxed{(x-16.5)^2 + y^2 = 156.25}$$

תשובה: משוואת המעגל החוסם את ΔBAM **את היא** $(x-16.5)^2 + y^2 = 156.25$ **.**

ד. (1) C **היא נקודת החיתוך של המעגל הנתון עם ציר ה-** x **, ולכן נמצאת במרחק מהמרכז** $M(29,0)$ **.**

תשובה: $C(9,0)$ **.**

(2) הישר $x=9$ **משיק למעגל הנתון בנקודה** $C(9,0)$ **(המשיק השמאלי ביותר למעגל זה).**

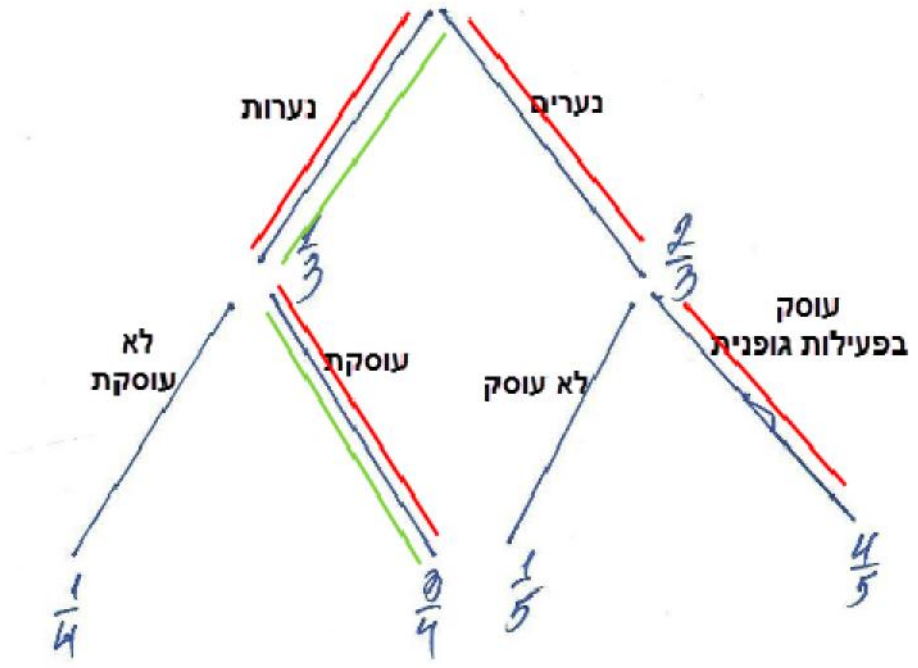
הישר $x=29$ **משיק למעגל החוסם את** ΔBAM **בנקודה** $M(29,0)$ **(המשיק הימני ביותר למעגל זה).**

עבור $9 < k < 29$ **הישר** $x=k$ **יחתוך את שני המעגלים (ולא ישיק לאף אחד מהם).**

תשובה: $9 < k < 29$ **.**

א. נעלה את הנתונים על עץ אפשרויות.

כיוון שמספר הנערים שהשתתפו בסקר גדול פי שניים ממספר הנערות, הרי ש- $\mathrm{P}(boys)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(girls)=\frac{1}{3}$.



ההסתברות שהמשתתף שנבחר עוסק בפעילות גופנית (המסלולים האדומים) היא: $P=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{47}{60}$.

תשובה: שהמשתתף שנבחר עוסק בפעילות גופנית היא $\frac{47}{60}$.

ב. ידוע שהמשתתף שנבחר עוסק בפעילות גופנית.

יש לחשב את ההסתברות שנבחרה נערה. זה החלק של המסלול הירוק מבין המסלולים האדומים.

$$\mathrm{P}(girl\ /\ practicing\ physical\ activity)=\frac{\mathrm{P}(girl\cap practicing\ physical\ activity)}{\mathrm{P}(practicing\ physical\ activity)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{47}{60}}=\frac{15}{47}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{15}{47}$.

ג. נחשב באמצעות נוסחת ברנולי את ההסתברות למאורע של:

"לפחות 2 מתוך 4 שנבחרו הן נערות שעוסקות בפעילות גופנית".

כלומר: 2, או 3, או 4, מתוך 4 משתתפים שנבחרו באקראי, יהיו נערות שעוסקות בפעילות גופנית.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $p=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=0.25$, $n=4$.

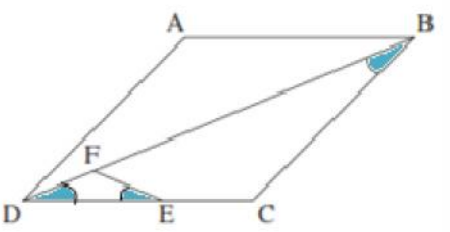
$$P = P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)$$

$$P=\binom{4}{2}0.25^2(1-0.25)^{4-2}+\binom{4}{3}0.25^3(1-0.25)^{4-3}+0.25^4$$

$$P=6\cdot0.25^2\cdot0.75^2+4\cdot0.25^3\cdot0.75+0.25^4$$

$$P=\frac{67}{256}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{67}{256}$.



נתונים

1. $ABCD$ **מעוין** **2.** $BCEF$ **בר חסימה במעגל**

עבור ג. 3. $DB=3DE$ **4.** $S_{\Delta DFE}=2$ **סמ"ר**

צ"ל: א. (1) $\sphericalangle FED=\sphericalangle CBD$ **(2)** ΔDFE **שווה שוקיים.**

ב $\Delta DFE\sim\Delta DCB$ **ג.** S_{ABCD}

הסבר		טענה	נימוק
	5	$\sphericalangle FED+\sphericalangle CEF=180^\circ$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
2	6	$BCEF$ בר חסימה במעגל	נתון
5	7	$\sphericalangle CBD+\sphericalangle CEF=180^\circ$	זוויות נגדיות במרובע בר חסימה משלימות ל- 180°
7 ,5	8	$\sphericalangle FED=\sphericalangle CBD$ (ז)	כלל מעבר וחישוב
מ.ש.ל. א (1)			
1	9	$ABCD$ מעוין	נתון
9	10	$BC=DC$	צלעות המעוין שוות זו לזו
10	11	$\sphericalangle BDC=\sphericalangle CBD$	ב- ΔDCB מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות
11 ,8	12	$\sphericalangle FED=\sphericalangle BDC$	כלל המעבר
12	13	ΔDFE שווה שוקיים	אם שתי זוויות שוות המשולש שווה שוקיים
מ.ש.ל. א (2)			
	14	$\sphericalangle FDE=\sphericalangle FDE$ (ז)	זווית משותפת
14 ,8	15	$\Delta DFE\sim\Delta DCB$	משפט דמיון זווית זווית
מ.ש.ל. ב			
3	16	$\frac{DE}{DB}=\frac{1}{3}$	נתון וחישוב
16 ,15	17	$\frac{DF}{DC}=\frac{DE}{DB}=\frac{FE}{CB}=\frac{1}{3}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים והצבה
2	18	$S_{\Delta DFE}=2$ סמ"ר	נתון
18 ,17 ,15	19	$S_{\Delta DCB}=18$ סמ"ר	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון $(1:3)^2=1:9$
19 ,9	20	$S_{ABCD}=36$ סמ"ר	האלכסון מחלק את המעוין לשני משולשים שווי שטח (וחופפים)
מ.ש.ל. ג			

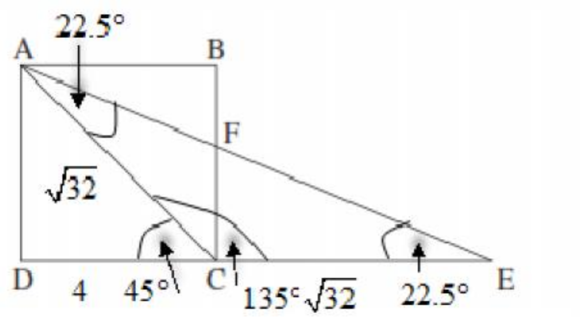
א. נחשב את זוויות המשולש ACE .

אלכסוני הריבוע חוצי זוויותיו הישרות, לכן $\sphericalangle ACD = 45^\circ$ **, והזווית הצמודה לה** $\sphericalangle ACE = 135^\circ$.

נתון כי $AC = CE$ **, ולכן** $\sphericalangle CAE = \sphericalangle AEC = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22.5^\circ$ **(זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים).**

תשובה: $\sphericalangle ACE = 135^\circ$, $\sphericalangle CAE = \sphericalangle AEC = 22.5^\circ$.

ב. $S_{\Delta ACE}$ = **סמ"ר** $8\sqrt{2}$



$$8\sqrt{2} = \frac{AC \cdot CE \cdot \sin 135^\circ}{2}$$

$$16\sqrt{2} = (AC)^2 \sin 135^\circ$$

$$\frac{16\sqrt{2}}{\sin 135^\circ} = (AC)^2$$

$$32 = (AC)^2$$

$AC =$ **ס"מ** $\sqrt{32}$

ΔACD **על פי משפט פיתגורס**

$$(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$$

$$2(DC)^2 = 32$$

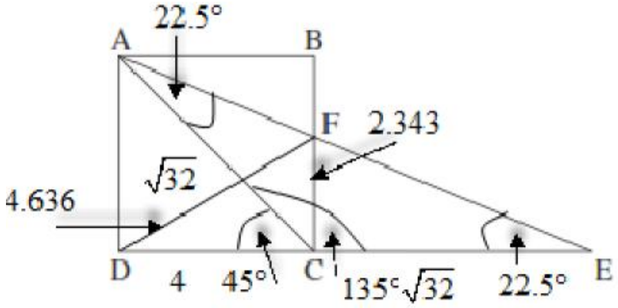
$$(DC)^2 = 16$$

$DC =$ **ס"מ** 4

תשובה: אורך צלע הריבוע 4 **ס"מ.**

ג. נחשב את אורך הקטע DF בשני שלבים.

$CE = AC = \sqrt{32}$ **ס"מ**



$\underline{\Delta CEF}$

$$\tan\sphericalangle 22.5° = \frac{CF}{CE}$$

$$\sqrt{32}\,\tan\sphericalangle 22.5° = CF$$

$CF =$ 2.343 **ס"מ**

על פי משפט פיתגורס ΔDCF

$$(DC)^2 + (CF)^2 = (DF)^2$$

$$4^2 + 2.343 = (DF)^2$$

$$21.49 = (DF)^2$$

$DF =$ 4.636 **ס"מ**

תשובה: $DF =$ 4.636 **ס"מ**.

ד. נחשב את רדיוס המעגל החוסם את ΔDFE.

$\underline{\Delta DFE}$

$$\frac{DF}{\sin 22.5°} = 2R$$

$$\frac{4.636}{2\sin 22.5°} = R$$

$R =$ 6.057 **ס"מ**

תשובה: אורך רדיוס המעגל החוסם את ΔDFE **הוא** 6.057 **ס"מ**.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{5}{(2x-4)^2}$ **.**

בתחום ההגדרה מכנה שונה מאפס. לכן, $\boxed{x\neq 2}\leftarrow 2x\neq 4 \leftarrow (2x-4)^2\neq 0$**.**

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq 2$ **.**

ב. האסימפטוטה האופקית: חזקת המונה (0 **) קטנה מחזקת המכנה (** 2 **), ולכן** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

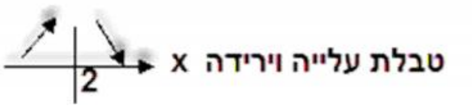
אסימפטוטה אנכית: $x=2$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן הישר** $x=2$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=0$ **,** $x=2$ **.**

ג. נמצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{0-5\cdot(2x-4)\cdot 2}{(2x-4)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{10(4-2x)}{(2x-4)^4}}$$



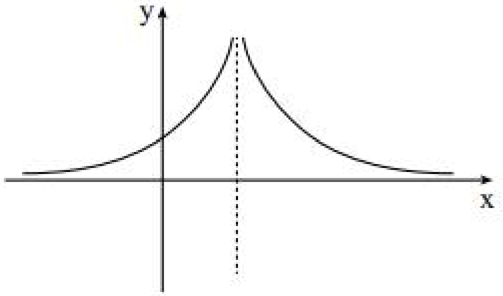
המונה מתאפס עבור $x=2$ **שלא בתחום ההגדרה.**

מכנה הנגזר חיובי, והמונה מיוצג על ידי ישר יורד, העובר מחיוביות לשליליות,

ובהתאם הפונקציה עוברת מעלייה לירידה.

תשובה: עלייה: $x<2$ **, ירידה:** $x>2$ **.**

ד. סקיצה מתאימה של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{5}{(2x-4)^2}$ **.**



ה. נתונה הפונקציה $-f(x)$. פונקציה סימטרית לפונקציה $f(x)$ ולציר ה- x.

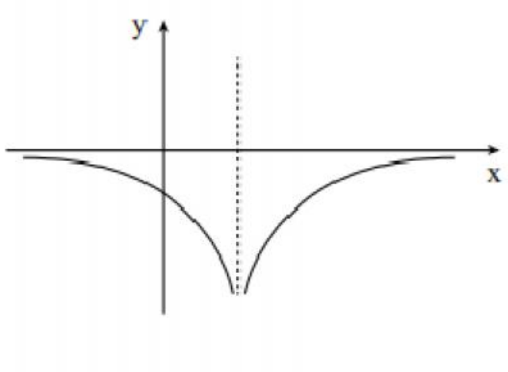
נשים לב שנגזרת הפונקציה החדשה היא $-f'(x)$, כלומר שתחומי העלייה והירידה יתהפכו.

(1) תשובה: $y=0$, $x=2$. אין שינוי באסימפטוטות המאונכות לצירים.

הערה – האסימפטוטה האופקית הייתה משתנה, אם *לא* הייתה $y=0$.

(2) בסרטוט הגרף של $-f(x)$, נשים לב שתחומי העלייה והירידה מתהפכים,

ובעוד ש- $f(x)$ הייתה חיובית לכל $x \neq 2$, הרי ש- $-f(x)$ תהייה שלילית לכל $x \neq 2$.



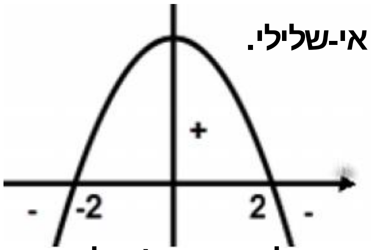
א. נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$.

הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

$4-x^2>0$

$4-x^2=0$

$x=2,\quad x=-2$



הביטוי שבתוך השורש מיוצג על ידי פרבולה הפוכה (בעלת מקסימום, "עצובה")
ובהתאם לתחום בו היא חיובית נמצא את תחום ההגדרה.

תשובה: תחום ההגדרה: $-2\le x\le 2$.

ב. (1) נמצא נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ציר y **:** $x=0$ - $f(0)=0\sqrt{4-0^2}=0\quad\rightarrow\boxed{(0,0)}$

ציר x **:** $y=0$ - $0=x\sqrt{4-x^2}\quad\rightarrow x=-2,0,2$.

תשובה: $(0,0)$, $(2,0)$, $(-2,0)$.

(2)נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

נשים לב ש: $(2,0)$, $(-2,0)$ תהייה נקודות קיצון בקצה.

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{x(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}}$$

$$4-2x^2=0$$

$$x^2=2$$

$$x=\sqrt{2}\quad\rightarrow y=\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-\sqrt{2}^2}=2\quad\rightarrow(\sqrt{2},2)$$

$$x=-\sqrt{2}\quad\rightarrow y=-\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-(-\sqrt{2})^2}=-2\quad\rightarrow(-\sqrt{2},-2)$$

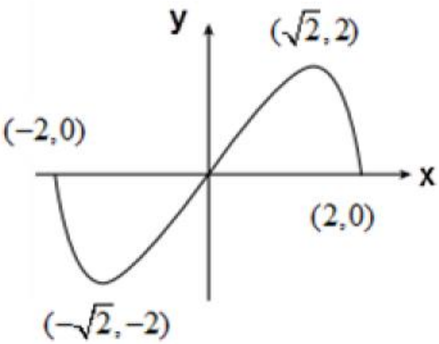
נמצא את סוגי נקודות הקיצון, בהתאם לטבלת עלייה וירידה , המבוססת על ערכי הפונקציה.

(את סימני הנגזרת, הוספתי עבור סעיף ד. תחומי עלייה וירידה קבעתי כבר לפי ערכי הפונקציה)

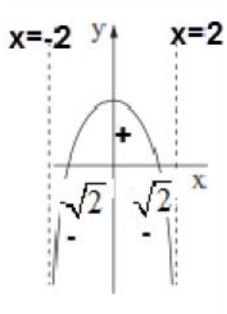
x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
$f(x)$	0		-2		2		0
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
מסקנה	Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה: $(2,0)$ **מינימום ,** $(\sqrt{2},2)$ **מקסימום ,** $(-\sqrt{2},-2)$ **מינימום ,** $(-2,0)$ **מקסימום.**

ג. נסרטט סקיצה .



ד. הגרף של הפונקציה $f'(x)$ **הוא גרף** IV **.**

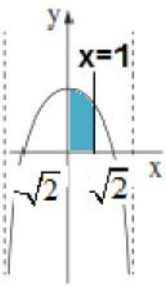


IV

נימוקים: (1) מתאפס עבור $x=\pm\sqrt{2}$ **(2) תחומי חיוביות ושליליות תואמים את תחומי העלייה והירידה של** $f(x)$ **.**

(3) $x=\pm 2$ **מאפס את מכנה הנגזרת (ולא את המונה) ולכן הישרים** $x=\pm\sqrt{2}$ **אסימפטוטות אנכיות.**

ה. נחשב את השטח המבוקש, צבוע בכחול בסקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.



$$S=\int_0^1 (f'(x)-0)\,dx = f(x)\Big]_0^1$$

$$x=1: \quad f(1)=1\cdot\sqrt{4-1^2}=\sqrt{3}$$

$$x=0: \quad f(0)=0$$

$$S=\sqrt{3}-0$$

$$\boxed{S=\sqrt{3}}$$

תשובה: השטח הוא $\sqrt{3}$ **יח"ר.**

8

א. נתון גרף הפונקציה $f(x)=x^3-6x^2+9x$ **.**

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x **.**

$$0=x^3-6x^2+9x$$
$$0=x(x^2-6x+9)$$
$$0=x(x-3)^2$$
$$x=0,3$$

תשובה: $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(3,0)$ **.**

ב. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *שטח המשולש* ABC **.**

כיוון שאורך הצלע $\mathrm{AB}=3$ **קבוע, הרי ששטח המשולש מקסימלי,**

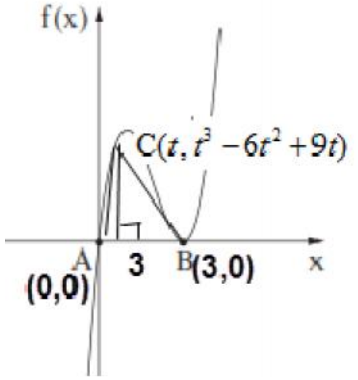
בנקודה שבה נקבל מקסימום מוחלט, בתחום $0<x<3$ **, של הפונקציה** $f(x)=x^3-6x^2+9x$ **.**

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$
$$0=3x^2-12x+9$$
$$x=1,\ x=3$$

לכן $x_{\mathrm{C}}=1$ **(** $x_{\mathrm{B}}=3$ **) מקסימום (על פי הגרף הנתון), ושיעורי הנקודה:** $\boxed{\mathrm{C}(1,4)} \rightarrow \quad f(1)=1^3-6\cdot1^2+9\cdot1=4$ **.**

ניתן לפתור, כמובן, גם ב"דרך הרגילה".

נסמן $\mathrm{C}(t,t^3-6t^2+9t)$ **נקודה על גרף הפונקציה בתחום** $0<x<3$ **.**



$$S_{\Delta\mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{AB}\cdot \mathrm{y}_C}{2}$$
$$S_{\Delta\mathrm{ABC}}=\frac{3(t^3-6t^2+9t)}{2}$$
$$\boxed{S_{\Delta\mathrm{ABC}}=1.5t^3-9t^2+13.5t}$$
$$S'=4.5t^2-18t+13.5$$
$$0=4.5t^2-18t+13.5$$
$$t=1,\ t=3$$
$$s'(0.5)=5.625>0,\ s'(2)=-4.5<0 \quad \rightarrow Max$$

תשובה: $\mathrm{C}(1,4)$ **, עבורה שטח המשולש** ABC **מקסימלי**

ג. תשובה: כן, $\mathrm{C}(1,4)$ **היא נקודת קיצון (מקסימום) של הפונקציה** $f(x)$ **, כפי שהוסבר בסעיף ב.**