א. נסמן ב- x את מהירות רוכב האופניים שיצא ממושב A (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- y את מהירות רוכב האופניים שיצא ממושב B (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- s את המרחק ממושב A עד מושב B (ק"מ)

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
יום אחד	מ- A עד מפגש	$\frac{3s}{4x}$	x	$\frac{3s}{4}$
	מ- B עד מפגש	$\frac{s}{4y}$	y	$\frac{s}{4}$
יום אחר	מ- A עד מפגש	$\frac{s}{2x}$	x	$\frac{s}{2}$
	מ- B עד מפגש	$\frac{s}{2y}$	y	$\frac{s}{2}$

ביום הראשון זמן הרכיבה של הרוכב שיצא מ- B קטן בחצי שעה והמשוואה המתאימה היא $\frac{3s}{4x}=\frac{s}{4y}+0.5$.

ביום האחר זמן הרכיבה של הרוכב שיצא מ- A קטן בחצי שעה והמשוואה המתאימה היא $\frac{s}{2x}+0.5=\frac{s}{2y}$.

$$\begin{cases}\frac{3s}{4x}=\frac{s}{4y}+0.5\\ \frac{s}{2x}+0.5=\frac{s}{2y}\end{cases}$$

$$+\begin{cases}\frac{3s}{4x}-0.5=\frac{s}{4y}\\ \frac{s}{2x}+0.5=\frac{s}{2y}\end{cases}$$

$$\frac{5s}{4x}=\frac{3s}{4y} \quad /:\frac{S}{4}>0$$

$$\frac{5}{x}=\frac{3s}{y}$$

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{5}{3}}$$

תשובה: היחס בין מהירות הרוכב הראשון למהירות הרוכב השני הוא $5:3$.

ב. כאשר שניהם יוצאים באותו זמן, ויחס המהירויות הוא $5:3$, הרי שייפגשו במרחק $\frac{5}{8}S$ מ- A,

כלומר במרחק של $\frac{1}{8}S$ מאמצע הדרך.

לכן $\frac{1}{8}S = b \quad \rightarrow \boxed{S = 8b}$

תשובה: המרחק ממושב A למושב B - הוא $8b$ (ק"מ).

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $1^3=1$ **אגף שמאל:** $1^2=1$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1^3+2^3+3^3+...+k^3=(1+2+3+...+k)^2$ **,**

או על פי נוסחת סכום של סדרה חשבונית: $1^3+2^3+3^3+...+k^3=(\frac{k(1+k)}{2})^2$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$(\frac{(k+1)(1+k+1)}{2})^2=\underbrace{1^3+2^3+3^3+...+k^3}_{\downarrow}+(k+1)^3$$

$$\Leftrightarrow\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=(\frac{k(1+k)}{2})^2+(k+1)^3$$

$$\Leftrightarrow\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$**, הראינו שאם הטענה נכונה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו,**
אז היא נכונה עבור $n=k+1$ **לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** n **טבעי.**

ב. נתון כי $1^3+2^3+3^3+...+n^3=5,833,225$

על פי הטענה שהוכחה בסעיף א $(1+2+3+...+n)^2=5,833,225$

ולכן $1+2+3+...+n=1,415$

$$\frac{n(1+n)}{2}=1,415\quad\rightarrow n^2+n-4,830=0$$

$$n_{1,2}=\frac{-1\pm139}{2}\quad\rightarrow\boxed{n=69}\quad\leftarrow n>0$$

תשובה: 69 **מחוברים.**

הערה

קיימות שתי נוסחאות של סכומים שראוי לזכור ומסייעות בתרגילי סדרות.

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$ **וגם** $$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

הנוסחה השנייה מוכיחה את הטענה ישירות, אולם *לא* ניתן להשתמש בה כי היא *לא* בתוכנית לימודים, וההוכחה שלה היא תרגיל כשלעצמו בנושא הסדרות.

א. נגדיר את המאורעות הבאים: S **- קבוצת האנשים**

A **- גברים** $\overline{A}$ **- נשים**

B **- בעלי רישיון נהיגה** $\overline{B}$ **- אינם בעלי רישיון נהיגה**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$N(S)=40$

$$N(A)=16 \quad \to P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{16}{40}=0.4 \quad \to P(\overline{A})=0.6$$

$$N(B)=12+16=28 \quad \to P(B)=\frac{N(B)}{N(S)}=\frac{28}{40}=0.7 \quad \to P(\overline{B})=0.3$$

$$N(A\cap B)=12 \quad \to P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(S)}=\frac{12}{40}=0.3$$

$$N(\overline{A}\cap B)=16 \quad \to P(\overline{A}\cap B)=\frac{N(\overline{A}\cap B)}{N(S)}=\frac{16}{40}=0.4$$

תשובה: ההסתברות שיבחר אדם שיש לו רישיון נהיגה 0.7 **.**

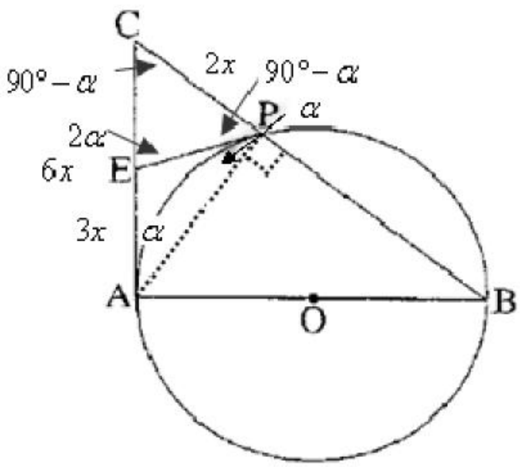
ב. כיוון שהאדם שנבחר באקראי חוזר לקבוצה הרי שההסתברויות *לא* משתנות לקראת הבחירה השנייה.
ההסתברות לבחירה של בעל רישיון נהיגה אחד לפחות, היא המאורע המשלים לבחירת שניים *ללא* רישיון.

$P=1-0.3^2=0.91$

תשובה: ההסתברות שלפחות פעם אחת ייבחר אדם שיש לו רישיון נהיגה היא 0.91 **.**

ג. מאורעות A **ו-** B **אינם תלויים אם** $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$ **.**
על פי נתוני התרגיל, $P(A)\cdot P(B)=0.4\cdot 0.7=0.28\neq P(A\cap B)=0.3$ **.**
תשובה: *לא*, המאורעות "לבחור מהקבוצה גבר" ו"לבחור מהקבוצה אדם שיש לו רישיון נהיגה" הם תלויים.

ד. אם מספר חברי הקבוצה, מספר הגברים ומספר הגברים בעלי רישיון נהיגה *לא* משתנה,
הרי ש- $P(A)=0.4$, $P(A\cap B)=0.3$ ***ללא* שינוי.**
לכן, על מנת המאורעות יהיו בלתי תלויים נדרש: $P(B)=0.75 \leftarrow 0.4\cdot P(B)=0.3$ **.**
כלומר ש- 75% **מחברי הקבוצה יהיו בעלי רישיון נהיגה, ומכאן שמספרם:** $0.75\cdot 40=30$ **.**
מכאן שמספר הנשים שצריכות להיות בעלות רישיון נהיגה הוא $30-12=18$ **.**
תשובה: ל- 18 **נשים צריך להיות רישיון נהיגה, על מנת שהמאורעות יהיו בלתי תלויים.**



<u>נתונים</u>

1. $\sphericalangle CAB = 90°$ **2.** AB **קוטר במעגל שמרכזו** O

3. EP **משיק למעגל בנקודה** P .

עבור ב: 4. $\frac{CP}{EA} = \frac{2}{3}$ **5.** $S_{\Delta CPE} =$ 2 **סמ"ר**

צ"ל: א. CE = EA **ב.** $S_{\Delta PAB}$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	6	$\sphericalangle CAB = 90°$	נתון
2	7	AB קוטר במעגל שמרכזו O	נתון
7	8	EA משיק למעגל בנקודה A .	מאונך לקוטר בנקודה שעל המעגל
3	9	EP משיק למעגל בנקודה P .	נתון
8, 9	10	EP = EA	אם מנקודה (E) יוצאים שני משיקים למעגל אז אורכיהם שווים זה לזה.
	11	$\sphericalangle EAP = \sim$	סימון
10	12	$\sphericalangle EPA = \sphericalangle EAP$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔEAP
11, 12	13	$\sphericalangle EPA = \sim$	כלל המעבר
7	14	$\sphericalangle APB = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
13, 14	15	$\sphericalangle CPE = 90° - \sim$	הפרש זוויות
11, 13	16	$\sphericalangle CEP = 2\sim$	זווית חיצונית ל- ΔEAP שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה
15, 16	17	$\sphericalangle ECP = 90° - \sim$	סכום זוויות ΔCEP 180°
15, 17	18	$\sphericalangle ECP = \sphericalangle CPE$	כלל המעבר
18	19	CE = EP	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔCEP
10, 19	20	CE = EA	כלל המעבר
		מ.ש.ל. א	
5	21	$S_{\Delta CPE} =$ 2 סמ"ר	נתון
20	22	$\frac{AC}{CE} = \frac{2}{1}$	חישוב

הסבר	מס'	טענה	נימוק
21, 22	23	$S_{\Delta CAP} = 2S_{\Delta CPE}$ = 4 סמ"ר	לשני המשולשים גובה משותף, לצלעות שהיחס ביניהן $2:1$
8	24	$CP \cdot CB = (CA)^2$	אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצא משיק וחותך למעגל, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק
4	25	$\frac{CP}{EA} = \frac{2}{3}$	נתון
	26	$CP = 2x$	סימון
25, 26	27	$EA = 3x$	הצבה וחישוב
20, 27	28	$AC = 6x$	חישוב
24, 26, 28	29	$2x \cdot CB = (6x)^2$ $CB = 18x$	הצבה וחישוב
26, 29	30	$PB = 16x$	הפרש קטעים
26, 30	31	$\frac{PB}{CP} = \frac{16x}{2x} = \frac{8}{1}$	חישוב
23, 31	32	$S_{\Delta PAB} = 8 \cdot S_{\Delta CAP}$ = 32 סמ"ר	לשני המשולשים גובה משותף, לצלעות שהיחס ביניהן $8:1$
		מ.ש.ל. ב	

ניתן לפתור גם באמצעות כלים טריגונומטריים

מציאת ערך $\sphericalangle C$ **ב-** ΔCAP

$$\cos \sphericalangle C = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \sphericalangle C = 70.53°$$

בעזרת נוסחת השטח , ΔCEP **, נמצא את ערכו של** x

$$2 = 0.5 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \sin 70.53°$$
$$x = 0.8409$$

ובהתאם: $AC = 6 \cdot 0.8409 = 5.0454$

מציאת ערך הקוטר ב- ΔABC

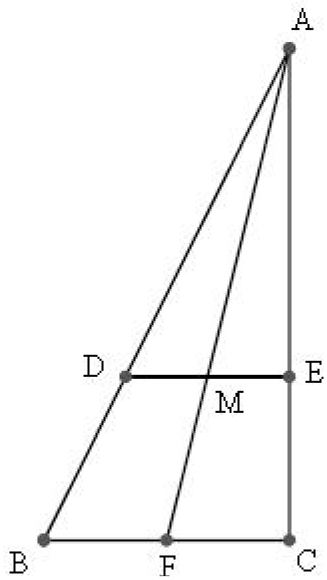
$$\tan 70.53° = \frac{AB}{5.0454}$$
$$AB = 14.27$$

מציאת שטח ΔABC

$$\frac{14.27 \cdot 5.0454}{2} = 36$$

$S_{\Delta CAP} = 2S_{\Delta CPE}$ 4 **סמ"ר** **לשני המשולשים גובה משותף, לצלעות שהיחס ביניהן** $2:1$

$S_{\Delta PAB} =$ 32 **סמ"ר** **הפרש שטחים**



נתונים

1. $\sphericalangle ACB = 90°$
2. AF תיכון לצלע BC
3. M נקודת מפגש תיכונים ΔABC
4. $DE \parallel BC$

עבור ב:

5. DC חוצה זווית ACB

צ"ל:

א. $\frac{DE}{BC}$

ב. הזוויות החדות ב- ΔABC

נימוק	טענה		הסבר
נתון	AF תיכון לצלע BC	6	2
נתון	M מפגש תיכונים ΔABC	7	3
תיכונים חותכים זה את זה ביחס $2:1$ וכללי פרופורציה	$\frac{AM}{AF} = \frac{2}{3}$	8	7 ,6
נתון	$DE \parallel BC$	9	4
משפט תאלס הרחבה 1 ΔABF	$\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$	10	9 ,8
משפט תאלס הרחבה 1 ΔABC	$\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$	11	10 ,9
מ.ש.ל. א			

ב. <u>ולעבודת הטריגו</u>

DC חוצה זווית ACB (נתון)

$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{1}$ (כללי פרופורציה)

$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{1}$ (משפט חוצה זווית ΔABC)

$\tan \sphericalangle B = \frac{AC}{BC} = 2$

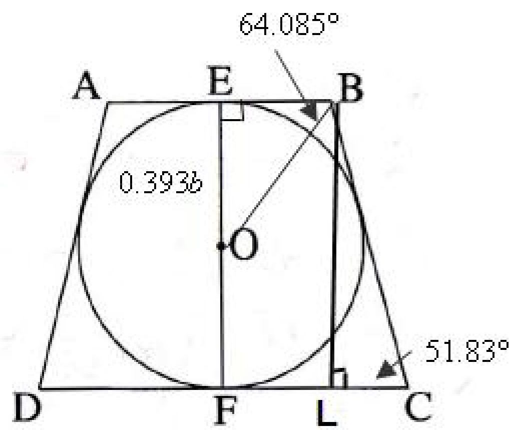
$\sphericalangle B = 63.43°$

$\sphericalangle A = 26.57°$ (סכום זוויות ΔABC $180°$)

תשובה: הזוויות החדות ב- ΔABC הן $\sphericalangle B = 63.43°$, $\sphericalangle A = 26.57°$

א. נמצא תחילה את גודלה של $\measuredangle C$ על פי המשוואה הנתונה.

$$\measuredangle(\sin\measuredangle C)^2 = \sin(90° - \measuredangle C)$$
$$1-(\cos\measuredangle C)^2 = \cos\measuredangle C$$
$$(\cos\measuredangle C)^2 + \cos\measuredangle C - 1 = 0 \quad \to (\cos\measuredangle C)_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$(\cos\measuredangle C)_1 = 0.618 \quad \to \boxed{\measuredangle C = 51.83°}$$
$$(\cos\measuredangle C)_2 < -1 \quad \to \varnothing \quad \leftarrow 0 < \cos\measuredangle C < 1$$



$BL \perp CD$ **(בניית עזר)**

EF **קוטר המעגל שמרכזו** O **החסום בטרפז (נתון)**

$\measuredangle BEF = \measuredangle EFC = 90°$ **(הקוטר מאונך למשיק בנקודת ההשקה)**

$BEFL$ **מלבן (מרובע עם שלוש זוויות ישרות הוא מלבן)**

$BL = 2r$ **(צלעות נגדיות שוות במלבן)**

$\underline{\Delta BCL}$

$$\frac{BL}{BC} = \sin\measuredangle C \Rightarrow \frac{2r}{b} = \sin 51.83^{O}$$
$$r = \frac{b\cdot\sin 51.83^{O}}{2} = 0.393b$$

תשובה: רדיוס המעגל החסום הוא $0.393b$ **יחידות.**

ב. נמצא את אורכו של הבסיס הקטן AB **.**

$\measuredangle ABC = 128.17°$ **(סכום זוויות חד צדדיות בין מקבילים הוא** $180°$**)**

$\measuredangle EBO = \frac{128.17°}{2} = 64.085°$ **(מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות)**

$\underline{\Delta EBO}$

$$\tan\measuredangle EBO = \frac{r}{EB}$$
$$\tan 64.085° = \frac{0.393b}{EB}$$
$$EB = \frac{0.393b}{\tan 64.085°}$$
$$EB = 0.191b$$

כיוון שזוויות הבסיס בטרפז שווה שוקיים שוות זו לזו,

אז גם חצאי הזוויות יהיו שווים,

ומכאן ש- ΔAOB **שווה שוקיים ולכן הגובה** OE **הוא גם תיכון ו-** $AB = 2BE$ **.**

$$\boxed{AB = 0.382b}$$

תשובה: אורכו של הבסיס הקטן $0.382b$ **יחידות** $AB =$ **.**

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{\cos x}}$

פונקציה זוגית אם $f(-x)=f(x)$

$$\cos x=\cos(-x)\quad \to f(-x)=\frac{1}{\cos(-x)}=\frac{1}{\cos x}=f(x)$$

תשובה: הוכַח.

ב. בתחום $0\le x\le 2\pi$

(1) תחום הגדרה : $x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k$ **כי מכנה שונה מ-** 0

ולכן בתוך התחום $x=\frac{3\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{2}$ **אסימפטוטות אנכיות** $\to\quad \lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} f(x)=\pm\infty$

תשובה: תחום ההגדרה, $x\ne\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ $0\le x\le 2\pi$ **, אסימפטוטות אנכיות** $x=\frac{3\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{2}$

(2) נמצא את נקודות הקיצון.

נקודות הקצה: $f(0)=\frac{1}{\cos 0}=1\ \to(0,1),\quad f(2\pi)=\frac{1}{\cos 2\pi}=1\ \to(2\pi,1)$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}}$$

$$\sin x=0\quad\to x=\pi k$$

ועבור $k=1$ **נקבל נקודה פנימית** $x=\pi$ **החשודה כקיצון** $(\pi,-1)\ \to\ f(\pi)=\frac{1}{\cos\pi}=-1$.

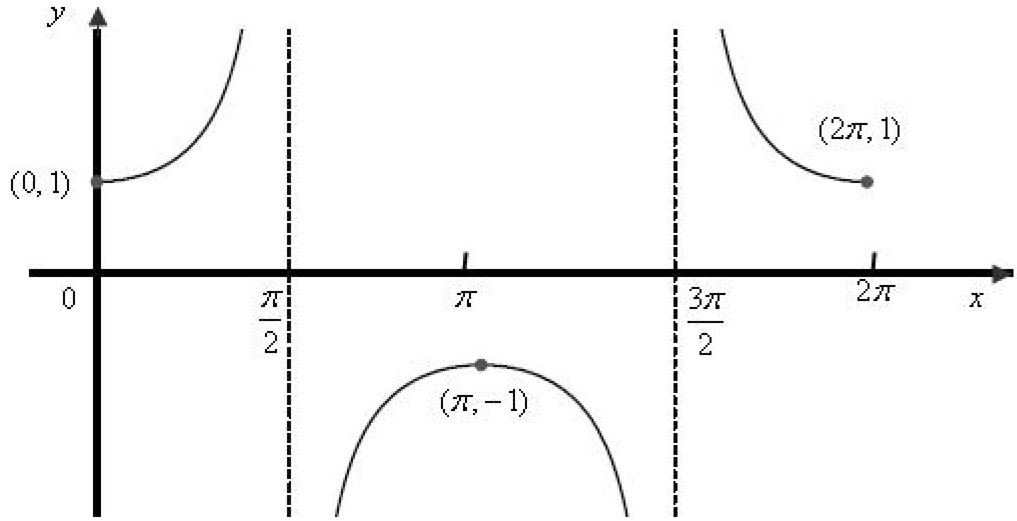
נבנה טבלת עלייה וירידה, בעזרת ערכי הנגזרת, כאשר מכנה הנגזרת חיובי

$$f'(\frac{\pi}{6})=\frac{0.5}{+}>0,\quad f'(\frac{2\pi}{3})=\frac{0.866}{+}>0,\quad f'(\frac{4\pi}{3})=\frac{-0.866}{+}>0,\quad f'(\frac{11\pi}{6})=\frac{-0.5}{+}<0$$

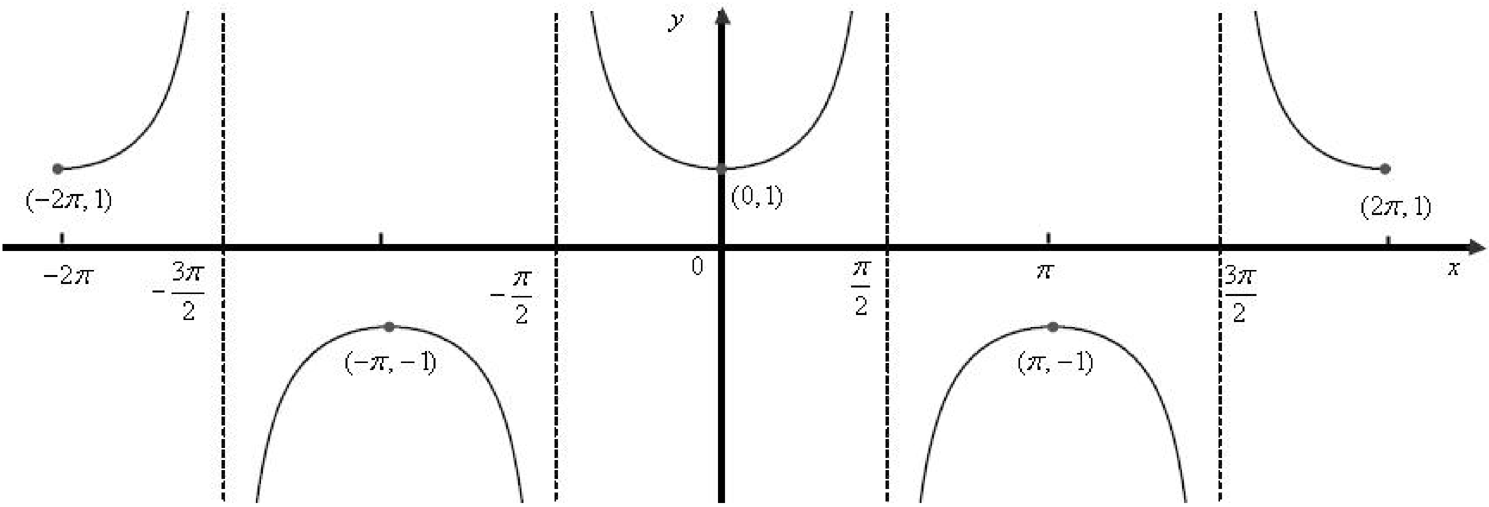
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	x
קצה	$+$		$+$	0	$-$		$-$	**קצה**	$f'(x)$
min	↗		↗	**max**	↘		↘	**Min**	**מסקנה**

תשובה: $(0,1)$ **מינימום ,** $(\pi,-1)$ **מקסימום ,** $(2\pi,1)$ **מינימום**

(3) הסקיצה בתחום $0 \le x \le 2$®



ג. עקב זוגיות הפונקציה, הרי שקיימת סימטריה לציר ה- y **ובהתאם הסקיצה המבוקשת.**

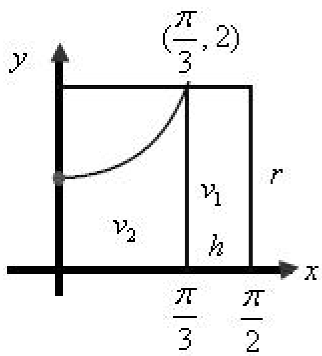


ד. נחשב את הנפח המבוקש:

$x = \pm\frac{®}{3} + 2®k \;\rightarrow \cos x = 0.5 \;\rightarrow \frac{1}{\cos x} = 2$ **ועבור** $k = 0$ **נקבל את שיעורי נקודת החיתוך בתחום** $(\frac{®}{3}, 2)$ **.**

נחלק את גוף הסיבוב לשני חלקים.

v_1 **הוא מלבן, כאשר גוף הסיבוב הנוצר הוא גליל , שרדיוסו** 2 **וגובהו** $\frac{®}{2} - \frac{®}{3} = \frac{®}{6}$ **ובהתאם נחשב את נפחו.**



$$v_1 = ®r^2h = ®\cdot 2^2 \cdot \frac{®}{6} = \frac{2}{3}®^2$$

$$v_2 = ®\int_0^{\frac{®}{3}} (\frac{1}{\cos x})^2\, dx$$

$$v_2 = ®\int_0^{\frac{®}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

$$v_2 = ®\tan x\Big]_0^{\frac{®}{3}}$$

$$v_2 = ®\tan\frac{®}{3} - ®\tan 0$$

$$\boxed{v_2 = ®\sqrt{3}}$$

תשובה: נפח גוף הסיבוב הוא $\frac{2}{3}®^2 + ®\sqrt{3} = 12.02$ **יח"ק.**

ה. נמצא את נקודות הקיצון בתחום $-\infty < x < \infty$

המחזוריות של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ **זהה למחזוריות של הפונקציה** $y = \cos x$ **, כלומר מחזוריות של** $2®k$ **.**

(1) $(2®k, 1)$ **מינימום.**

(2) $(® + 2®k, -1)$ **מקסימום.**

ניתן להסביר גם באמצעות סימני הנגזרת השנייה:

$$\boxed{f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}} \;\rightarrow f''(x) = \frac{\cos^3 x + 2\cos x\sin^2 x}{\cos^4 x} \;\rightarrow \boxed{f''(x) = \frac{\cos x(\cos^2 x + 2\sin^2 x)}{\cos^4 x}}$$

הנגזרת הראשונה מתאפסת עבור $x = ®k$ **, כאשר** $\sin x = 0$ **ובהתאם** $\cos x = \pm 1$ **.**

מכנה הנגזרת השנייה חיובי וערך הביטוי שבתוך הסוגריים חיובי.

לכן סימן הנגזרת השנייה נקבע בהתאם לסימן של $\cos x$

(1) עבור $x = 2®k \quad \cos x = 1 > 0$ **ולכן סימן הנגזרת השנייה חיובי כלומר** $\cup$ **, ואלו נקודות מינימום.**

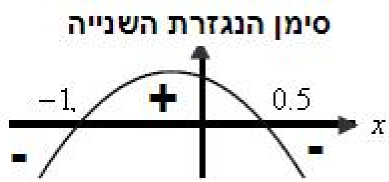
תשובה: $(2®k, 1)$ **מינימום.**

(2) עבור $x = ® + 2®k \quad \cos x = -1 < 0$ **ולכן סימן הנגזרת השנייה שלילי, כלומר** $\cap$ **, ואלו נקודות מקסימום.**

תשובה: $(® + 2®k, -1)$ **מקסימום.**

א. נמצא את תחומי החיוביות/ שליליות של , $f''(x)=\frac{-6x^2-3x+3}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$

שהם גם תחומי הקעירות/ קמירות של $f(x)$ **וגם תחומי העלייה/ ירידה של** $f'(x)$ **.**

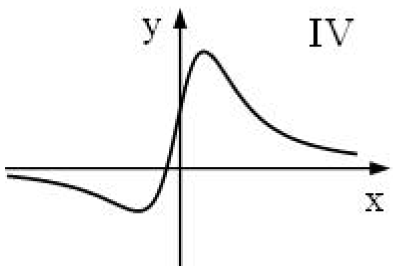


$$-6x^2-3x+3=0$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm 9}{-12}\quad\rightarrow x=-1,\ x=0.5$$

מכנה הנגזרת השנייה חיובי, ולכן סימן הנגזרת השנייה נקבע בהתאם למונה.

הביטוי $-6x^2-3x+3$ **הוא של פרבולה הפוכה, כמתואר משמאל.**



$f''(x)>0$ **עבור** $-1<x<0.5$ **ובתחום זה** $f'(x)$ **עולה.**

$f''(x)<0$ **עבור** $x>0.5$ **או** $x<-1$ **ובתחומים אלו** $f'(x)$ **יורדת.**

תשובה: גרף IV **הוא הגרף המתאים.**

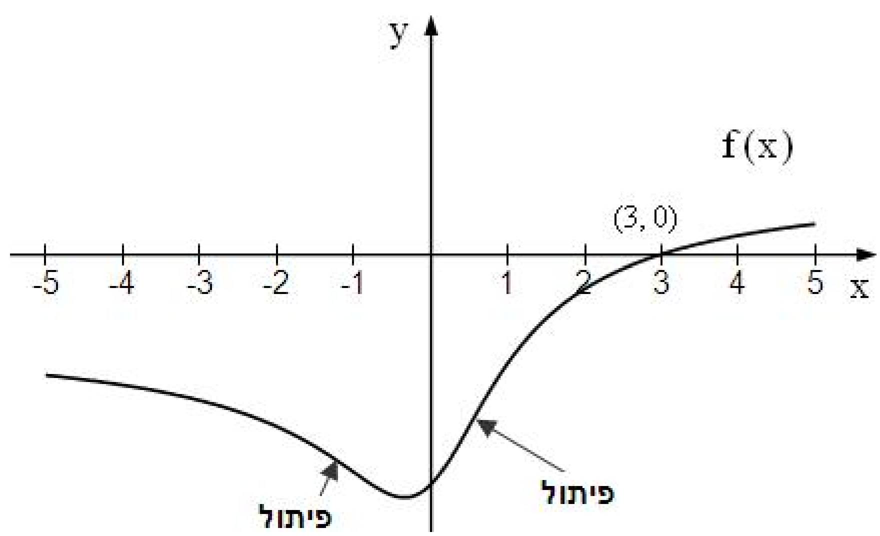
ב. (1) התשובה,על פי ההסבר בסעיף הקודם, בהתאם לתחומי חיוביות שליליות של $f''(x)$

תשובה: קעירות כלפי מעלה $\cup$ $-1<x<0.5$ **, קעירות כלפי מטה** $\cap$ $x>0.5$ **או** $x<-1$ **.**

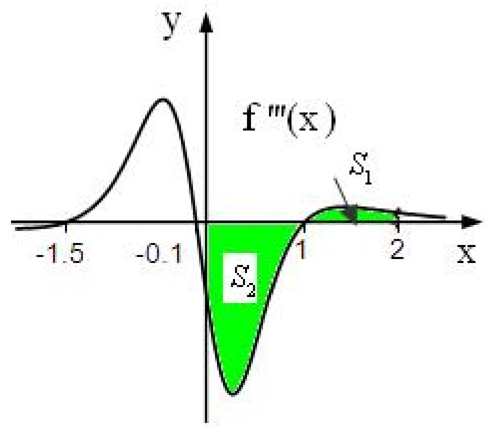
(2) ניתן לראות על פי גרף IV **כי בין** -1 **ל-** 0 $f'(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות ולכן נקודת מינימום.**

תשובה: בין -1 **ל-** 0 **נמצאת נקודת הקיצון (מינימום) של** $f(x)$ **.**

(3) נתון כי $(3,0)$ **נקודת חיתוך יחידה, ובהתאם על פי תתי סעיפים (1) ו- (2) סקיצה של** $f(x)$



ג. נחשב כל שטח בנפרד



$$S_1=\int_1^2 (f'''(x)-0)\,dx = f''(x)\Big]_1^2 = f''(2)-f''(1)=\frac{-6\cdot 2^2-3\cdot 2+3}{\sqrt{(1+2^2)^5}}-\frac{-6\cdot 1^2-3\cdot 1+3}{\sqrt{(1+1^2)^5}}=-0.483-(-1.061)=0.578$$

$$S_2=\int_0^1 (0-f'''(x))\,dx=-f''(x)\Big]_0^1=-f''(1)+f''(0)=1.061+3=4.061$$

$$S=S_1+S_2=0.578+4.061=4.639$$

תשובה: **גודל השטח הוא** 4.639 **יח"ר.**

א. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך A **בין הפרבולה הישרה** $g(x)=x^2-x$ **, שעוברת בראשית ובנקודה** $(1,0)$ **,**

לבין הפרבולה ההפוכה $g(x)=-a^2x^2$**, שקדקודה בראשית הצירים. הפרבולות נפגשות גם ב-** O **, ראשית הצירים.**

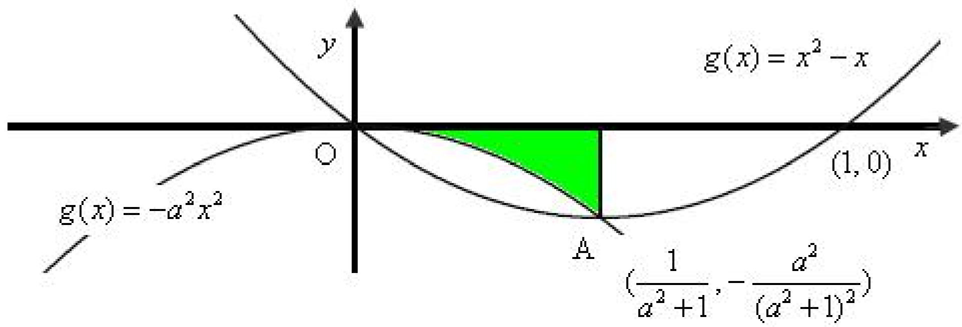
$$-a^2x^2 = x^2 - x \quad / : x_A > 0$$

$$-a^2x = x-1 \quad \to 1=(a^2+1)x$$

$$x=\frac{1}{a^2+1} \quad \to y=-\frac{a^2}{(a^2+1)^2} \quad \to \boxed{A(\frac{1}{a^2+1},-\frac{a^2}{(a^2+1)^2})}$$

תשובה: $A(\frac{1}{a^2+1},-\frac{a^2}{(a^2+1)^2})$

ב. הפונקציה שיש להביא ל*מקסימום* **היא** *השטח הצבוע בירוק* **.**



$$S=\int_0^{\frac{1}{a^2+1}}(0+a^2x^2)\,dx$$

$$S=\frac{a^2x^3}{3}\Bigg]_0^{\frac{1}{a^2+1}}$$

$$S=\frac{1}{3}(a^2(\frac{1}{a^2+1})^3-a^2\cdot 0^3$$

$$\boxed{S=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{(a^2+1)^3}}$$

זו פונקציית השטח, כאשר שיעור ה- x **של הנקודה** A **הוא בתחום** $0<x<1$ **.**

$$\boxed{S=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{(a^2+1)^3}}$$

$$S'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2a(a^2+1)^3-3(a^2+1)^2\cdot 2a\cdot a^2}{(a^2+1)^6}$$

$$S'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2a(a^2+1-3a^2)}{(a^2+1)^4}$$

$$\boxed{S'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2a(1-2a^2)}{(a^2+1)^4}}$$

$$0=1-2a^2$$

$$a=\pm\sqrt{0.5}$$

$$S'(-1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot(-1)\cdot(1-2\cdot(-1)^2)}{+}=\frac{1}{3}\cdot\frac{+}{+}>0,\quad S'(-0.5)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot(-0.5)\cdot(1-2\cdot(-0.5)^2)}{+}=\frac{1}{3}\cdot\frac{-}{+}<0\quad\to Max$$

$$S'(0.5)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 0.5\cdot(1-2\cdot 0.5^2)}{+}=\frac{1}{3}\cdot\frac{+}{+}>0,\quad S'(1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 1\cdot(1-2\cdot 1^2)}{+}=\frac{1}{3}\cdot\frac{-}{+}<0\quad\to Max$$

$$x_A=\frac{1}{1+0.5}=\frac{2}{3}\quad\to y_A=\frac{-0.5}{(1+0.5)^2}=-\frac{2}{9}\quad\to \boxed{A(\frac{2}{3},-\frac{2}{9})}$$

גם עבור $a=+\sqrt{0.5}$ וגם עבור $a=-\sqrt{0.5}$ מתקבל מקסימום, שכן הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות, ופונקצית השטח מעלייה לירידה.

עבור שני ערכים אלו מתקבלים שיעורים זהים של הנקודה $A(\frac{2}{3},-\frac{2}{9})$.

תשובה: שיעורי הנקודה $A(\frac{2}{3},-\frac{2}{9})$, עבורם השטח המבוקש מקסימלי.