

סיכום - קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת - שאלון 806

משפטים הקשורים לנגזרת הראשונה $f'(x)$:

1. אם x_1 היא נקודת קיצון פנימית של הפונקציה $f(x)$ אז $f'(x) = 0$.
(ההיפך לא בהכרח נכון, ולכן יש את המושג "נקודה חשודה בקיצון").
2. אם בנקודה x_1 מתקיים $f'(x_1) = 0$ ו- $f''(x_1) \neq 0$ אז ל- $f(x)$ יש ערך קיצון בנקודה x_1 .
ערך זה הוא מינימום מקומי אם $f''(x_1) > 0$ והוא מקסימום מקומי אם $f''(x_1) < 0$.
3. x_1 היא נקודה פנימית בתחום של הפונקציה $f(x)$ אז:
אם $f'(x_1) > 0$ אז הפונקציה עולה בנקודה x_1 .
אם $f'(x_1) < 0$ אז הפונקציה יורדת בנקודה x_1 .

משפטים הקשורים לנגזרת השנייה $f''(x)$:

1. אם $f''(x_1) > 0$ אז הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה \cup בנקודה x_1 .
אם $f''(x_1) < 0$ אז הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה \cap בנקודה x_1 .
2. אם x_1 היא נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ אז $f''(x_1) = 0$.
(ההיפך לא בהכרח נכון, ולכן יש את המושג "נקודה חשודה בפיתול").
3. נתונה הפונקציה $f(x)$ הגזירה n פעמים בנקודה x_1 . אם כל $(n-1)$ הנגזרות הראשונות ב- x_1 שוות לאפס ואילו הנגזרת ה- n ב- x_1 שונה מאפס ($f^{(n)}(x_1) \neq 0$), אז אם n אי-זוגי הנקודה x_1 היא נקודת פיתול, ואם n זוגי הנקודה x_1 היא נקודת קיצון.
סוג הקיצון - מינימום מקומי אם $f^{(n)}(x_1) > 0$ ומקסימום מקומי אם $f^{(n)}(x_1) < 0$.
4. מסקנה מהמשפט האחרון הנ"ל - שאם $f''(x_1) = 0$ ו- $f'''(x_1) \neq 0$ אז x_1 היא נקודת פיתול.

מקרים:

מקרה ראשון:

כאשר נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ ורוצים לתאר את גרף הפונקציה $f(x)$, או כאשר נתון גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$ ורוצים לתאר את גרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$.

1. נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$ יהיו הנקודות שבהן הפונקציה $f'(x)$ חותכת את ציר ה- x ועוברת מצד אחד שלו לצד השני שלו.

(אם המעבר של $f'(x)$ הוא מחיוביות לשליליות אז הנקודה היא נקודת מקסימום של $f(x)$, ואם המעבר של $f'(x)$ הוא משליליות לחיוביות אז הנקודה היא נקודת מינימום של $f(x)$).

2. אם הגרף של $f'(x)$ רק נוגע בציר ה- x (משיק לו) אבל לא חותך אותו, אז הנקודה היא נקודת פיתול של $f(x)$ שהמשיק בה מקביל לציר ה- x . לפיכך חשוב לשרטט נכון את גרף הפונקציה, בנקודה זו, ולהקפיד שהמשיק יקביל לציר ה- x .

3. בתחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית אז הפונקציה $f(x)$ עולה, ובתחום שבו הפונקציה $f'(x)$ שלילית אז הפונקציה $f(x)$ יורדת.

4. הערות:

- א. כאשר נתון גרף הפונקציה $f'(x)$ יש להכין טבלה שבה יוכנסו תחום ההגדרה, ונקודות החיתוך עם ציר ה- x . החיוביות של הפונקציה $f'(x)$ תסומן בחץ עולה והשליליות של הפונקציה $f'(x)$ תסומן בחץ יורד. כך ניתן לגלות את נקודות הקיצון של $f(x)$.
- ב. לאחר שרטוט גרף הפונקציה $f(x)$ וודאו בעזרת "רכיבה על האופניים משמאל לימין" על גרף הפונקציה $f(x)$ שאכן קיבלתם את הפונקציה $f'(x)$ הנתונה.

מקרה שני:

כאשר נתון גרף הפונקציה $f(x)$ ורוצים לתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$, או כאשר נתון גרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$ ורוצים לתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.

1. בכל נקודת קיצון פנימית של הפונקציה $f(x)$, הפונקציה $f'(x)$ חותכת את ציר ה- x .

(אם הנקודה היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x)$ אז הגרף של $f'(x)$ עובר משליליות לחיוביות, ואם הנקודה היא נקודת מקסימום של הפונקציה $f(x)$ אז הגרף של $f'(x)$ עובר מחיוביות לשליליות).

2. בכל נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ יש לפונקציה $f'(x)$ נקודת קיצון פנימית ולהיפך.

שימו לב!

הסדר בין הפונקציות השונות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ יהיה:

א. פיתול בפונקציה $f(x)$.

ב. קיצון בפונקציה $f'(x)$.

ג. חיתוך עם ציר ה- x בפונקציה $f''(x)$.

זכרו! במשפט נאמר - " אם x_1 היא נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ אז $f''(x_1) = 0$.
ולכן בפונקציות הנגזרת $f'(x)$ הנקודה x_1 חייבת להיות נקודת קיצון.

3. בהתאם לאותו הסדר הנ"ל, בכל נקודת פיתול של $f'(x)$, יש לפונקציות הנגזרת השנייה $f''(x)$ נקודת קיצון פנימית ולהיפך.

4. בתחום שבו הפונקציה $f(x)$ עולה אז פונקציות $f'(x)$ היא חיובית, ובתחום שבו הפונקציה $f(x)$ יורדת אז פונקציות $f'(x)$ היא שלילית.
("רכיבה על האופניים משמאל לימין" על גרף הפונקציה $f(x)$).

הערה:

5. על מנת לשרטט את גרף הפונקציה $f'(x)$ נקבל מידע בשאלה עצמה לגבי מספר נקודות הפיתול שיש לפונקציה $f(x)$ או נקבל מידע לגבי כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $f'(x)$.

6. הקשר בין נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ לנקודת קיצון של $f'(x)$:

א. אם בנקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$, הפונקציה עוברת מקעירות כלפי מטה \cap לקעירות כלפי מעלה \cup אז לפונקציות הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת מינימום פנימית בנקודה זו.

ב. אם בנקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$, הפונקציה עוברת מקעירות כלפי מעלה \cup לקעירות כלפי מטה \cap אז לפונקציות הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת מקסימום פנימית בנקודה זו.

ג. המעבר של הפונקציה $f(x)$ מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך, יכול להתבצע כאשר הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת, ולכן בעזרת $f'(x)$ נקבע אם $f(x)$ עולה או יורדת.

שימו לב!

לפונקציה $f(x) = x^3$ יש נקודת פיתול בנקודה $(0,0)$, והיא עוברת מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה. פונקציות הנגזרת שלה $f'(x)$ שווה ל- $3x^2$ וזו פרבולה צוחקת שיש לה מינימום.
מומלץ לזכור מקרה פרטי זה ולהיעזר בו בקשר בין נקודת הפיתול של $f(x)$ לנקודת הקיצון של $f'(x)$.

ג. הקשר בין תחומי הקעירות של הפונקציה $f(x)$ לתחומי העלייה והירידה של $f'(x)$.

תחומי הקעירות כלפי מעלה \cup של הפונקציה $f(x)$ זהים לתחומי העלייה של הפונקציה $f'(x)$.

ותחומי הקעירות כלפי מטה \cap של הפונקציה $f(x)$ זהים לתחומי הירידה של הפונקציה $f'(x)$.

(בחיפוש תחומי הקעירות של $f(x)$ נדרוש $f''(x) > 0$ וגם לתחומי העלייה של הפונקציה $f'(x)$ נדרוש $f''(x) > 0$, הדרישות זהות).

הערה: תחום הקעירות כלפי מעלה של הפונקציה $f(x) = x^3$ הוא $x > 0$, וזה גם תחום העלייה של הפונקציה $y = 3x^2$ (הנגזרת שלה).

זיהוי גרפים של הפונקציות השונות:

1. כאשר נתונים, באותה מערכת צירים, הגרפים של הפונקציה $f(x)$ ושל הפונקציה $f'(x)$ ויש לזהות איזה גרף מתאר את כל אחת מהפונקציות. ניתן להיעזר בנקודות הקיצון של אחת הפונקציות ולראות שאכן בפונקציה השנייה יש חיתוך עם ציר ה- x . ניתן להיעזר בתחומי עלייה וירידה של אחת מהפונקציה ולבדוק חיוביות ושיליות בפונקציה השנייה.

2. כאשר נתונים הגרפים של הפונקציה $f(x)$ ושל הפונקציה $f''(x)$ ויש לזהות איזה גרף מתאר את כל אחת מהפונקציות. ניתן להיעזר בנקודות שבהן יש שינוי קעירות (נקודות פיתול) בפונקציה אחת, כאשר בפונקציה השנייה, באותו שיעור ה- x , יהיה חיתוך עם ציר ה- x .

פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית:

הגדרה מתמטית לפונקציה זוגית: $f(-x) = f(x)$ (תמונת מראה, סימטריות, ביחס לציר ה- y).
הגדרה מתמטית לפונקציה אי-זוגית: $f(-x) = -f(x)$ (תמונת מראה ביחס לשני הצירים).
קיימות פונקציות שהן לא זוגיות ולא אי-זוגיות.
באופן כללי ניתן להגיד - שנגזרת של פונקציה משנה את הזוגיות שלה, כלומר הנגזרת של פונקציה זוגית היא אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

דוגמאות:

- א. הפונקציה $y = x^3$ היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת שלה $y' = 3x^2$ היא פונקציה זוגית.
ב. הפונקציה $y = x^4$ היא פונקציה זוגית והנגזרת שלה $y = 4x^3$ היא פונקציה אי-זוגית.
ג. הפונקציה $y = \sin x$ היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת שלה $y' = \cos x$ היא פונקציה זוגית.
ניתן לנצל תכונות של סימטריות למעברים בין הפונקציות השונות - $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.

נא לציין במדויק על ציר ה- y איזה פונקציה שרטטתם: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.

ולסיום:-

זכרו כי המסמך בא לתת לכם רק הנחיות כלליות ותזכורת
לחומר הלימוד ואינו פותר אתכם מחזרה ותרגול של כל החומר!
בהצלחה בבחינה!!!