סיכום - סעיפים נוספים בחקירת פונקציה – חדו"א שאלון 806

לאחר שחקרנו את הפונקציה $f(x)$ כולל שרטוט סכמתי ללא קנה מידה, מוסיפים בד"כ לשאלה סעיפים נוספים הקשורים לפונקציה $f(x)$ - עליכם לדעת להתמודד עם סעיפים מהסוג שלהלן:

1. מגדירים פונקציה $g(x)$ שמקיימת את אחד מהתנאים הבאים:

א. $g(x) = -f(x)$.

<u>מבקשים</u>: שרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.

<u>הדרך לפתרון</u>: הפונקציה $g(x)$ תהיה סימטרית לפונקציה $f(x)$ ביחס לציר ה- x.
ולכן שיעורי ה- x של נקודות המקסימום של האחת יהיו נקודות המינימום של הפונקציה השנייה ולהיפך.
שיעורי ה-y של נקודות הקיצון של האחת יהיו מנוגדים לשיעורי ה-y של הפונקציה השנייה.
העלייה של הפונקציה האחת תהיה הירידה של הפונקציה השנייה ולהיפך.

ב. $g'(x) = f(x)$.

<u>מבקשים:</u> מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה שלה.
<u>הדרך לפתרון</u>: גרף הפונקציה $f(x)$ הוא כעת גרף הפונקציה $g'(x)$, ולכן:
נקודות החיתוך של הפונקציה $g'(x)$ עם ציר ה-x הן נקודות החשודות בקיצון בפונקציה $g(x)$.
בתחום שבו הפונקציה $g'(x)$ חיובית הפונקציה $g(x)$ עולה, ובתחום שבו הפונקציה $g'(x)$ שלילית הפונקציה $g(x)$ יורדת.

ג. $g''(x) = f(x)$.

<u>מבקשים</u>:
1). מצא את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $\cap$.
2). מצא את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של $g'(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $\cap$ שלה.

<u>הדרך לפתרון</u>: גרף הפונקציה $f(x)$ הוא כעת גרף הפונקציה $g''(x)$ ולכן:
I). נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g''(x)$ עם ציר ה-x הן נקודות חשודות בפיתול של גרף הפונקציה $g(x)$.
בתחום שגרף הפונקציה $g''(x)$ חיובי הפונקציה $g(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$.
בתחום שגרף הפונקציה $g''(x)$ שלילי הפונקציה $g(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$.

II). נקודות הפיתול של $g'(x)$ הן נקודות הקיצון של $g''(x)$.
תחומי הקעירות כלפי מעלה של $g'(x)$ הם תחומי העלייה של הפונקציה $g''(x)$.
תחומי הקעירות כלפי מטה של $g'(x)$ הם תחומי הירידה של הפונקציה $g''(x)$.

זכור! כאשר לפונקציה $g''(x)$ יש נקודת מינימום, הפונקציה $g'(x)$ עוברת מקעירות כלפי מטה $\cap$ לקעירות כלפי מעלה $\cup$ ולהיפך.

ד. $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

<u>מבקשים</u>: מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ ואת האסימפטוטות האנכיות שלה.

<u>הדרך לפתרון</u>: שיעור ה-x של נקודות הקיצון של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $f(x)$ יהיה זהה, נקודות המקסימום של האחת יהיו נקודות המינימום של השנייה ולהיפך.
ההסבר המתמטי:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\left[f(x)\right]^{-1}\ \Rightarrow\ g'(x)=\frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^{2}}\ \Rightarrow\ g'(x)=0\ \Rightarrow\ f'(x)=0$$

שיעור ה-y של נקודות הקיצון בפונקציה אחת יהיה ההופכי בפונקציה השנייה.

האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$ יהיו נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (הרי בנקודות אלה $f(x)=0$).

ה. $g(x)=\left[f(x)\right]^{2}$.

<u>מבקשים</u>: מצא את שיעורי ה-x שמקיימים $g'(x)=0$.

<u>הדרך לפתרון</u>: נגזור את הפונקציה $g(x)$ (לא נישכח נגזרת פנימית של $f(x)$) ונקבל:

$$g'(x)=2\cdot f(x)\cdot f'(x)$$

שתי אפשרויות

$$g'(x)=0\ \Rightarrow\ f(x)=0\ ,\ f'(x)=0$$

$f'(x)=0$ בוצע במציאת נקודות חשודות לפונקציה $f(x)$.
$f(x)=0$ בוצע במציאת נקודות חיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.
ומכאן ניתן למצוא את כל שיעורי ה- x שמקיימים את $g'(x)=0$.

ו. נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת: $g(x)=a\cdot f(x)+b$.
בנוסף, נתונים המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של $g(x)$, יש למצוא את הפונקציה $g(x)$ <u>כאשר</u> $a>0$.

שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ושל הפונקציה $g(x)$ יהיו זהות:
$g'(x)=a\cdot f'(x)$.

$g'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$.

היות ונתון $a>0$ סימן ערך הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ יהיה זהה לסימן ערך הנגזרת של הפונקציה $g(x)$.
$f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad g'(x)>0$.

ולכן שיעורי ה-x של נקודות המקסימום בשתי הפונקציות יהיו זהות כנ"ל לגבי נקודות המינימום.

באמצעות הנתונים של המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $g(x)$ ניתן בעזרת מערכת משוואות למצוא את הנעלמים a ו- b.
(כל תוצאה של a הסותרת את הנתון $a>0$ יש לפסול אותה).
הקשר בין ערכי שתי הפונקציות: $g(x)=a\cdot f(x)+b$.

<u>כאשר</u> $a<0$:
ההבדל הוא שנקודות הקיצון יהיו הפוכות – נקודת המקסימום של $f(x)$ תהיה נקודת המינימום של $g(x)$ ולהיפך.

ז. נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת: $g(x)=a\cdot f(x)+b$, $a>0$.
בנוסף נתון שהישרים $y=0.5$, $y=2.5$ משיקים לפונקציה $g(x)$, מצא את הפרמטרים a ו- b.

כמו בסעיף הקודם ו', נפתור מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים על מנת למצוא את הנעלמים a ו-b.
$g(x_0)=a\cdot f(x_0)+b=0.5$.
$g(x_1)=a\cdot f(x_1)+b=2.5$.

x_0 - שיעור ה-x של נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

x_1 - שיעור ה-x של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$.

ח. רשום בצורה כללית בתחום $-\infty < x < \infty$ למשל: את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה,
או את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.
סעיף זה יכול להישאל בחקירת פונקציה טרינוגומטרית בגלל המחזוריות שבה.
זכרו! שחקירת הפונקציה, עד לפני סעיף זה, יכולה לעזור במציאת התשובה לסעיף זה.
(כלומר תשובה לסעיף זה צריכה להתאים גם עבור החקירה שבוצעה בסעיפים הקודמים).
התשובה לסעיף זה היא גם מחזורית (שימוש ב-k).

2. שרטט את גרף הפונקציה $|f(x)|$.
<u>הדרך לפתרון</u>: כל התחומים שבהם הפונקציה $f(x)$ שלילית הופכים להיות תחומים חיוביים (כאילו ששמו מראה על ציר ה- x עבור התחום השלילי של הפונקציה $f(x)$).
התחומים החיוביים של הפונקציה $f(x)$ נשארים כפי שהם.

3. מצא תחום שבו הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f'(x)$ שלילית.
<u>הדרך לפתרון</u>: בהתאם לטבלה ניתן למצוא מתי $f'(x)$ שלילית (זהו תחום הירידה של $f(x)$). את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ שלילית ניתן למצוא מהסתכלות בגרף הפונקציה $f(x)$, ואז יש לבצע מערכת "וגם" בין שני התחומים הנ"ל.

4. העזר בגרף הפונקציה $f(x)$ ושרטט גרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
<u>זכור</u>! אם אין לפונקציה $f(x)$ נקודות פיתול אז אין לפונקציה $f'(x)$ נקודות קיצון פנימיות.

5. שרטט בצורה כללית, בהסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$, את גרף הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת, ומצא את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית וגם הפונקציה $f''(x)$ חיובית.
<u>הדרך לפתרון</u>: משרטטים בצורה כללית את גרף הפונקציה $f'(x)$, כאשר יש לה נקודת קיצון פנימית אחת (כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת). מוצאים בהתאם לשרטוט את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית. בעזרת "נסיעה עם האופניים" משמאל לימין על הפונקציה $f'(x)$ מוצאים את התחום שבו הפונקציה $f''(x)$ חיובית ומבצעים חיתוך בין שני התחומים הנ"ל (מערכת "וגם").

6. מצא לאילו ערכי k הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת, בשתי נקודות, בשלוש נקודות, באף נקודה.

<u>הדרך לפתרון</u>: מעבירים קווים אופקיים ובודקים מתי קווים אלה חותכים את הפונקציה $f(x)$ בנקודה אחת, בשתי נקודות, בשלוש נקודות ובאף נקודה.

הפתרון יכול להיות גם תחום מסויים. את הפתרון יש לרשום באמצעות k.

ניתן לשאול אותה שאלה עבור המקרה $x=n$, הרעיון זהה אך כעת הקווים יהיו אנכיים.

הפתרון לסעיף זה הוא בד"כ גרפי ולא אלגברי.

7. מצא לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(x)\le k$.

<u>הדרך לפתרון</u>: מעבירים קו אופקי $y=k$ ובודקים באלו תחומים של x הפונקציה $f(x)$ נמצאת מתחת לקו הנ"ל. במקרה הנ"ל יש לקחת בחשבון את נקודות החיתוך של הפונקציה עם קו אופקי זה.

8. הוכח את אי השוויון $f(x)\ge k$.

<u>הדרך לפתרון</u>: מוצאים את נקודת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x)$ ומראים שערך הפונקציה בנקודה זו גדול או שווה ל- k ולכן אי השוויון מתקיים.
זכור! ערך הפונקציה הוא ה- y.

ולסיום:-

זכרו כי המסמך בא לתת לכם רק הנחיות כלליות ותזכורת לחומר הלימוד ואינו פותר אתכם מחזרה ותרגול של כל החומר!

בהצלחה בבחינה!!!