סיכום הנדסה אנליטית - שאלון 807

א. הנקודה והקו הישר

1. שיפוע הישר העובר דרך שתי נקודות (x_1, y_1) , (x_2, y_2) הוא:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\alpha$$

הזווית α נמדדת עם הכיוון החיובי של ציר ה- x כלפי מעלה.

2. חלוקה פנימית של קטע ביחס נתון $\frac{AP}{PB} = \frac{k}{L}$, מציאת נקודת החלוקה P בעזרת "כפל של הרחוקים" :

$$X_P = \frac{kx_2 + Lx_1}{k + L} \quad , \quad y_P = \frac{ky_2 + Ly_1}{k + L}$$

3. מרכז הכובד של משולש הוא מפגש התיכונים והוא ממוצע של שלושת הקודקודים.

4. את שטח משולש עפ"י קודקודיו ניתן למצוא גם בעזרת דטרמיננטה

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. למציאת שטח משולש באמצעות דטרמיננטה, יש להיעזר בערך מוחלט, כי השטח חיובי, ואין חשיבות לסדר הקודקודים.

6. כאשר נתון שטח המשולש ורוצים למצוא קודקוד, יש להשתמש בערך מוחלט על-מנת למצוא את כל האפשרויות לפתרון.

7. זווית בין שני ישרים – נקודת החיתוך בין שני הישרים תהיה מרכז השעון ושימוש בנוסחא יהיה "הנקודה פחות החץ". הנוסחא: $tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$.

8. בשאלות מסוג: מציאת שיפוע של ישר במשולש ש"ש ובטרפז ש"ש ומציאת משוואת חוצה זווית, אפשר להיעזר בזווית בין שני ישרים. מומלץ להכניס מערכת צירים בשאלות מסוג זה.

מקרה מיוחד הוא כאשר חוצה הזווית מקביל לציר ה – y : יוצא אז ששיפועי שוקיי הזווית הם: $m_1 = -m_2$.

9. מרחק בין שני ישרים מקבילים – המקדמים של x ושל y חייבים להיות זהים בשני הישרים המקבילים. יש לדאוג שהמקדם של y יהיה חיובי כלומר $B > 0$.

שימוש בנוסחא "הנקודה פחות החץ". הנוסחא: $d = \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

10. משוואת המקביל האמצעי היא: $Ax + By + \frac{C_1 + C_2}{2} = 0$.

11. מרחק נקודה מישר – יש לדאוג שהמקדם של y יהיה חיובי כלומר $B > 0$.
    א. אם הנקודה נמצאת מעל הישר - המרחק יהיה חיובי, ואם הנקודה מתחת לישר - המרחק יהיה שלילי.
    ב. אם הנקודה מימין לישר שלא מוגדר (ישר מקביל לציר ה- y כלומר $B = 0$) - המרחק חיובי, ואם משמאל לו - המרחק שלילי.
    במקרה זה יש לדאוג שהמקדם של x יהיה חיובי כלומר $A > 0$.

12. זכרו: יש תרגילים בהנדסה אנליטית, בהם מומלץ להכניס את השרטוט למערכת צירים, כמו למשל בתרגילים בהם מדובר בזווית בין ישרים (שרטוט מומלץ תמיד).

ב. <u>המעגל</u>

1. במעגל הקנוני - הנעלם הוא הרדיוס R, ובמעגל הכללי - הנעלמים הם a, b, R.
2. במשוואת המעגל, המקדמים של x^2 ו - y^2 חייבים להיות שווים, מומלץ שתדאגו שמקדמים אלה יהיו שווים ל- 1.
   יש לבצע השלמה לריבוע על מנת לראות אם זה מעגל (הרדיוס חיובי) או נקודה (הרדיוס אפס) או הקבוצה הריקה (הרדיוס שלילי).
3. משוואת המשיק למעגל הקנוני בנקודה (x_1, y_1) שעליו: $xx_1 + yy_1 = R^2$.
4. משוואת המשיק למעגל הכללי בנקודה (x_1, y_1) שעליו:
   $$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2.$$
5. משוואת המיתר, במעגל הקנוני, שבין שתי נקודות ההשקה: $xx_0 + yy_0 = R^2$.
   כאשר (x_0, y_0) היא הנקודה שממנה יוצאים שני המשיקים.
6. משוואת המיתר, במעגל הכללי, שבין שתי נקודות ההשקה:
   $$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2.$$
7. תנאי ההשקה של ישר למעגל הקנוני הוא: $n^2 = R^2(m^2+1)$

(המרחק של מרכז המעגל מהישר $y = mx + n$ צריך להיות הרדיוס, או שנדרוש פתרון יחיד בחיתוך בין הישר למעגל כלומר $\Delta = 0$).

8. משוואת המשיק למעגל הכללי: $y-b=m(x-a)\pm R\sqrt{m^2+1}$.

משוואה זו טובה לכל משיק, בתנאי שאיננו מקביל לציר ה- y.

לכן כאשר מקבלים בפתרון משוואה זו רק משיק אחד או אף משיק, חובה לבדוק האם קיים משיק נוסף המקביל לציר ה- y ומתאים לתנאי השאלה.

9. מציאת אורך המשיק – אין צורך למצוא את נקודת ההשקה, פשוט יש לבצע את משפט פיתגורס בין הרדיוס, מרחק הנקודה שממנה יוצא המשיק למרכז המעגל, ואורך המשיק עצמו.

ג. <u>האליפסה</u>

1. <u>הגדרה ראשונה של האליפסה</u> – המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות (המוקדים) שווה לקטע קבוע $(2a)$.

2. משוואת האליפסה הקנונית $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ כאשר: $a^2-b^2=c^2$.

3. המשוואה $Ax^2+By^2+F=0$ מייצגת אליפסה קנונית אם המקדמים של x^2 ו- y^2 שונים מאפס, זהים בסימנים ושונים זה מזה.
האיבר החופשי שונה מאפס והסימן שלו הפוך לסימן הזהה של A ו- B .

4. יש לדעת לפתח את הנוסחאות לרדיוס הווקטור באליפסה:

$$r_1=a-\frac{cx}{a} \qquad r_2=a+\frac{cx}{a} \qquad (r_1+r_2=2a)$$

5. <u>צירים, קודקודים, ומרכז האליפסה</u>:
הציר הגדול הוא הקטע שבין שתי נקודות החיתוך על ציר ה- x והוא שווה ל- 2a.
הציר הקטן הוא הקטע שבין שתי נקודות החיתוך על ציר ה- y והוא שווה ל- 2b .
קצות הצירים הנ"ל נקראים גם <u>קודקודי האליפסה</u>.
<u>מרכז האליפסה</u> – הוא נקודת החיתוך של הציר הגדול והציר הקטן (ראשית הצירים).
המרחק בין המוקדים שווה ל- 2c .
** זכרו שניתן לדבר על אליפסה שבה: $a<b$.
באליפסה זו הציר הגדול יהיה שווה ל- 2b והציר הקטן יהיה שווה ל- 2a.
המוקדים יהיו בנקודות $F_2(0,-c)$, $F_1(0,c)$.
הקשר בין a , b , c יהיה $b^2-a^2=c^2$.

6. כאשר מבקשים למצוא את משוואתו של מיתר באליפסה ונתונה נקודת האמצע שלו,
<u>לא מומלץ</u> לפתור זאת בעזרת ארבעה נעלמים (x_1,y_1) (x_2,y_2), אלא בדרך הבאה:
מניחים שמשוואת המיתר היא מהצורה: $y = mx + n$.
מבצעים חיתוך בין משוואה זו עם משוואת האליפסה ומקבלים משוואה ריבועית.
מנצלים את נוסחת ווייטה, נוסחת אמצע קטע, וכן את העובדה שהמיתר עובר דרך נקודת האמצע
ומוצאים כך את m ו- n .
כזכור: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ו- $\frac{x_1 + x_2}{2}$ נתון.

7. <u>האליפסה כיווץ של המעגל (הגדרה שנייה של האליפסה)</u> -
האליפסה זהו המקום הגיאומטרי המתקבל מהמעגל $x^2 + y^2 = a^2$, על-ידי החלפת כל
נקודה (x,y) שלו בנקודה $\left(x, \frac{b}{a}y\right)$ כאשר $0 < b < a$.
בעיות של כיווץ ממעגל לאליפסה, מומלץ לפתור בעזרת השיטות של מקומות גיאומטריים,
כאשר הנקודה (s,t) נמצאת על המעגל, ונקודה על האליפסה תסומן ב- (x , y).
בבעיות של מעבר מאליפסה למעגל, סימון הנקודות יהיה הפוך:
נקודה על האליפסה תסומן ב- (s,t) ונקודה על המעגל תסומן ב- (x , y).

8. משוואת המשיק לאליפסה בנקודה (x_1 , y_1) שעליה: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.
המשיקים לאליפסה המאונכים לציר ה- x הם: $x = \pm a$.
המשיקים לאליפסה המאונכים לציר ה- y הם: $y = \pm b$.

9. משוואת המיתר שבין שתי נקודות ההשקה באליפסה: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ כאשר
הנקודה (x_0 , y_0) היא הנקודה שנמצאת מחוץ לאליפסה וממנה יוצאים שני המשיקים.

10. <u>תנאי ההשקה של ישר לאליפסה</u> -
ישר משיק לאליפסה בתנאי שמתקיים קשר בין הפרמטרים a ו- b של האליפסה
לפרמטרים m ו- n של הישר המשיק לאליפסה: $n^2 = a^2m^2 + b^2$.

11. משוואת המשיק לאליפסה תהיה: $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

12. המרחק המינימלי של נקודה הנמצאת על האליפסה מישר נתון, היא הנקודה שעל האליפסה, שהמשיק דרכה מקביל לישר הנתון.

13. **<u>אקסצנטריות ומדריכים של האליפסה</u> -**

האקסצנטריות היא היחס בין מרחק נקודה שעל האליפסה מהמוקד לבין מרחק הנקודה מהמדריך. האקסצנטריות שווה: $e=\frac{c}{a}$ (באליפסה $0<e<1$).

לאליפסה שני מדריכים שהמשוואות שלהם: $x=\pm\frac{a^2}{c}$.

<u>הערה</u>: הנושא אינו בחומר הלימוד, אך יש תרגילים שניתן לפתור באמצעות בדיקת המדריך והאקסצנטריות.

14. **<u>הגדרה שלישית של האליפסה</u> – המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שיחס מרחקיהן מנקודה נתונה F_1 (מוקד) ומישר נתון (מדריך) הוא קבוע וקטן מ- 1 .**

15. **מכפלת השיפועים של מיתר באליפסה והקוטר שחוצה אותו הוא קבוע ושווה ל - $\frac{-b^2}{a^2}$.**

16. **היקף משולש ששנים מקודקודיו נמצאים במוקדי האליפסה, וקודקוד שלישי נמצא על האליפסה הוא: $2c+2a$.**

17. **במקומות גיאומטריים באליפסה ניתן להיעזר כתרגיל עזר כאשר רוצים להשתחרר מהביטוי a^2-s^2 :**

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{t^2}{b^2}=1-\frac{s^2}{a^2}=\frac{a^2-s^2}{a^2} \quad\Rightarrow\quad a^2-s^2=\frac{a^2t^2}{b^2}$$

הנקודה $(s\ ,\ t)$ היא נקודה כלשהי על האליפסה הנתונה.

כנ"ל ניתן לעשות כאשר רוצים להשתחרר מהביטוי: b^2-t^2 .

18. **כאשר יש שאלה המשלבת אליפסה ומעגל ניתן להיעזר:**

*** בשיקולי סימטריה.**

*** בכך שיש פתרון אחד (נניח ל- x) ולכן יש לדרוש עבור המשוואה הריבועית ב- x פתרון אחד, כלומר - $\Delta=0$.**

*** בכך שבנקודות ההשקה יש אותו משיק לשתי הצורות (אליפסה ומעגל) ולבצע התלכדות ישרים.**

כזכור:

התנאי להתלכדות של שני ישרים $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$

הוא: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

19. **יש לנהוג בהוכחות באליפסה, במעגל ובפרבולה, כמו במציאת מקומות גיאומטריים – נקודה על צורות אלה מקיימת את משוואתן.**

ד. הפרבולה

1. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה קבועה (המוקד) ומישר קבוע (המדריך).
2. רדיוס הווקטור r – הוא המרחק השווה של נקודה שעל הפרבולה מהמוקד ומהמדריך.

   לפיכך רדיוס הווקטור שווה ל- $r = x + \frac{p}{2}$.
3. משוואת הפרבולה שמוקד שלה בנקודה $\left(\frac{p}{2},0\right)$ והמדריך שלה הוא $x = -\frac{p}{2}$ היא $y^2 = 2px$.
4. ניתן לדבר גם על פרבולה מהצורה: $y^2 = -2px$ $(p > 0)$.

   במקרה זה המשתנה x מקבל רק ערכים שליליים ואפס.
5. ככל שהפרמטר p של הפרבולה גדול יותר כך המוקד מתרחק מהראשית והפרבולה נפתחת יותר.
6. כאשר יש למצוא את משוואת המיתר בפרבולה, ונתונה נקודת האמצע של המיתר, לא מומלץ לפתור מערכת של 4 נעלמים עם 4 משוואות, אלא להניח שמשוואת המיתר היא $y = mx + n$.

נקודת האמצע מקיימת את משוואת המיתר, בנוסף יש לבצע חיתוך בין הישר לפרבולה, כך נקבל משוואה ריבועית ב- x וננצל את נוסחאות וייטה על מנת למצוא את הנעלמים m ו- n.

7. משוואת המשיק לפרבולה בנקודה (x_1, y_1) שעליה היא:

$$yy_1 = 2p\left(\frac{x + x_1}{2}\right) = p(x + x_1)$$

ולכן המשיק לפרבולה בנקודה $(0,0)$ הוא ציר ה- y.

הערה: בנושא המשיקים, לצורות השונות, ניתן להגיע באמצעות גזירה של פונקציה סתומה.

8. משוואת המיתר שבין שתי נקודות ההשקה היא: $yy_0 = 2p\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = p(x + x_0)$

כאשר הנקודה (x_0, y_0) נמצאת מחוץ לפרבולה וממנה יוצאים שני המשיקים.

9. תנאי ההשקה של ישר לפרבולה הוא: $n=\frac{p}{2m}$.

תנאי זה התקבל כאשר דרשנו שהישר $y=mx+n$ "יגע" בפרבולה בנקודה אחת ולכן

$\Delta=0$. ומשוואת המשיק היא: $y=mx+\frac{p}{2m}$.

10. הפרבולה $y^2=2px$ והאליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ נחתכות בזווית ישרה אם ורק אם:

$b^2=2a^2 \quad (b>a)$.

11. מעגל ופרבולה נקראים משיקים זה לזה אם יש להם נקודה משותפת (נקודת ההשקה) שדרכה עובר משיק המשותף למעגל ולפרבולה.

12. המרחק המינימלי של נקודה הנמצאת על הפרבולה מישר נתון, היא הנקודה שעל הפרבולה, שהמשיק דרכה מקביל לישר הנתון.

13. כאשר יש שילוב של מעגל ופרבולה ניתן להשתמש בשיקולי סימטריה, ולדרוש $\Delta=0$ (פתרון יחיד).

דרך נוספת לפתרון להשתמש בהתלכדות ישרים, היות בנקודת ההשקה הישרים מתלכדים.

יש לזכור שאם המשיקים מתלכדים אז גם הנורמל למשיקים אלה מתלכדים, והנורמל במעגל עובר דרך מרכז המעגל.

14. דוגמאות לשימוש בנוסחאות וייטה להוכחת תכונות בפרבולה $y^2=2px$:

I. מכל נקודה שעל המדריך רואים את הפרבולה בזווית ישרה.

(יש למצוא משוואה ריבועית עם m^2 ולמצוא שמכפלת השיפועים $m_1 \cdot m_2$ שווה ל- -1).

II. אם הישר $y=mx+n$ הוא מיתר בפרבולה, אז שיעור ה-y של נקודת האמצע שלו היא $\frac{p}{m}$. (יש למצוא משוואה ריבועית עם y^2).

III. מיתר העובר דרך המוקד חותך את הפרבולה בנקודות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2) אז מתקיים:

1) $y_1y_2=-p^2$ (יש למצוא משוואה ריבועית עם y^2).

2) $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$ (יש למצוא משוואה ריבועית עם x^2).

IV. שני ישרים המשיקים לפרבולה $y^2 = 2px$ נפגשים בנקודה $M(x_0, y_0)$.

נקודת ההשקה של המשיק האחד היא בנקודה $A(x_1, y_1)$ ושל המשיק השני היא

בנקודה $B(x_2, y_2)$, אז מתקיים: $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $x_0^2 = x_1 \cdot x_2$.

ה. מקומות גיאומטריים

1. מקום גיאומטרי הוא אוסף של נקודות שיש להן תכונה מסוימת.
2. את המקום הגיאומטרי המבוקש נסמן ב- (x, y). המטרה היא למצוא קשר בין x ל- y.
   קשר זה יכול להיות: קו ישר - כולל מקרים מיוחדים ($y = m$, $x = k$) , מעגל, אליפסה, פרבולה, ויכול להיות גם משהו לא ידוע (או לא מזוהה).
3. אם בבעיה עצמה מוגדר כבר מקום גיאומטרי, נסמן נקודה על מקום גיאומטרי זה ב- (s, t).
   התשובה הסופית של המקום הגיאומטרי תהיה עם x ו- y בלבד ו**לא** עם למשל, x ו- s או x_0 ו- y_0.
   שימו לב כשאתם כותבים את האות s לא להתבלבל עם הספרה 5 !
4. במידה ויש בשאלה פרמטרים כמו k , R , וכו' - קבועים אלה יכולים להופיע בתשובה הסופית של המקום הגיאומטרי.
5. זכרו שלפעמים מומלץ להשתמש בפרמטר אחד בלבד t ולא בשניים (s, t) למשל:
   כאשר נקודה כלשהי נמצאת על הישר $y = 5x + 3$, נגדיר אותה כ- $(t, 5t+3)$.
6. כאשר מבקשים בשאלה לזהות את המקום הגיאומטרי, וקיבלתם את המשוואה המתאימה, יש להוסיף: עבור מעגל - "קיבלתי מעגל שמרכזו בנקודה... ורדיוסו..."
   עבור אליפסה - "קיבלתי אליפסה שהפרמטרים a ו- b שלה הם..."
   עבור פרבולה - "קיבלתי פרבולה שהפרמטר p שלה הוא..."
7. במידה ובשאלה **לא התבקשתם לזהות** את המקום הגיאומטרי המבוקש, מיותר לעשות זאת ולהסתכן בטעות (יש להבחין בין **מציאת** המקום הגיאומטרי לבין **זיהוי** המקום הגיאומטרי).

8. **במקומות גיאומטריים ייתכן שתהיה מגבלה גיאומטרית ו/או מגבלה מתמטית - נא לחפש את המגבלה ולרשום אותה בסוף הפתרון.**

דוגמא: כאשר מעלים בריבוע שני אגפי משוואה שאגף אחד שלה הוא עם שורש והאגף השני ללא שורש, יש לבצע בדיקה שלא הוכנסו פתרונות זרים, האגף ללא השורש חייב להיות חיובי, ומכאן נובעת המגבלה המתמטית.

מגבלה יכולה להיות למשל, שהקודקוד השלישי במשולש יהיה על אותו ישר המחבר את שני הקודקודים האחרים, ולפיכך במצב זה לא יהיה כלל משולש.

9. **במציאת המקום הגיאומטרי ניתן להשתמש בכל הכלים המתמטיים העומדים לרשותכם, למשל:**

א. <u>בגיאומטריה</u> – משפט פיתגורס, משפט חוצה הזווית, פרופורציה ודמיון, מפגש התיכונים (מרכז הכובד), משפט תאלס והרחבותיו, הגובה ליתר במשולש ישר זווית, השקה של שני מעגלים מבפנים ומבחוץ וכו'.

זכרו - נקודת המגע של שני מעגלים משיקים נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו:

כאשר ההשקה היא מבחוץ - קטע המרכזים שווה לסכום הרדיוסים.

כאשר ההשקה היא מבפנים - קטע המרכזים שווה להפרש הרדיוסים.

ב. <u>בהנדסה אנליטית</u> – חלוקת קטע ביחס נתון, אורך משיק למעגל, מציאת שטח משולש, מרחק בין נקודה לישר, תנאי ניצבות, חיתוך בין שני ישרים, אמצע קטע, זווית בין ישרים, מרחק בין שתי נקודות וכו'.

10. **אם בדרך לפתרון השאלה עליכם למקם את הצורה הנתונה במערכת צירים, שימו לב לבחור את מיקום מערכת הצירים, ביחס לצורה הנתונה, באופן שיקל עליכם לפתור את הבעיה. (לפעמים אתם אלה שצריכים למקם את מערכת הצירים).**

ולסיום:-

זכרו כי המסמך בא לתת לכם רק הנחיות כלליות ותזכורת לחומר הלימוד ואינו פותר אתכם מחזרה ותרגול של כל החומר!

בהצלחה בבחינה!!!