סיכום - חקירת פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות - שאלון 807

1. לא לשכוח לציין את תחום ההגדרה של הפונקציה – גם אם לא מבקשים!
2. גזירת הפונקציה חייבת להיות נכונה –
   עלולים לפסול לכם את כל השאלה במקרה שהגזירה אינה נכונה!
3. נא שרטטו את הטבלה של x , y' , y'' לכל רוחב הדף – אין סיבה להצטמצם.
4. בטבלה יש להכניס את הנקודות החשודות ואת תחום ההגדרה.
   לא לשכוח את נקודות הקיצון בקצוות.
5. זכרו! את ההצבות יש לעשות בנגזרת הראשונה האמיתית והנכונה (לשים לב גם למכנה).
6. כל מה שסותר את תחום ההגדרה – נפסל.
7. לא כל תחום הגדרה הופך בצורה אוטומטית אסימפטוטה אנכית. ייתכן שיש שם "חור".
   (שימו לב! שמו המתמטי של "חור" הוא "נקודת אי רציפות סליקה").
8. חובה לבדוק ליד כל "קיר מבטון מזוין" איך הפונקציה מתקרבת לקיר (הטבלה לא מספיקה לכך).
   ככל שמתקרבים לקיר והערך המוחלט של ה- y גדל – זוהי אסימפטוטה אנכית.
   במידה ומתקרבים לקיר והערך המוחלט של ה- y מתכנס (קטן) – זהו חור.
   ייתכן שבצד אחד של "הקיר" יש אסימפטוטה ובצד השני שלו יש חור.
   אין לוותר על הבדיקה ליד כל "קיר מבטון מזויין":
   באופן כללי:

$$\lim_{x\to x_1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x\to x_1^+} f(x) =$$

לדוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

הקיר מבטון מזוין נמצא ב- $x=0$, נבדוק מה קורה משני צדדיו.

$x = -0.1$ 0.000000454
$x = -0.01$ $\lim_{x\to 0^-} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} =$ 0
$x = -0.001$ 0

בצד שמאל זה "חור" בראשית.

$x = 0.1$ 220.26
$x = 0.01$ $\lim_{x\to 0^+} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} = 2.6 \cdot 10^{39}$
$x = 0.001$ ∞

בצד ימין של הראשית זו אסימפטוטה.

9. זכרו! כאשר מקבלים במחשבון תשובה כמו: 8.2345123^{-07} יש להזיז בעצם את הנקודה 7 מקומות שמאלה, ולכן המספר הנ"ל בעצם שואף לאפס.

10. זכרו! במחשבון יש כפתור $a^{b}\!/_{c}$ שעוזר בצמצום שברים, ובחיבור וחיסור שברים.
(הכפתור אינו מחליף את כפתור החילוק) מומלץ לפעמים לעבוד בשברים ולא בעשרוני.

11. בחקירת פונקציות e , ln , ופונקציית שורש, יש לבדוק את האסימפטוטה האופקית בנפרד כאשר x שואף לאינסוף, ובנפרד כאשר x שואף למינוס אינסוף.

12. כאשר יש שתי אסימפטוטות אופקיות יש לשרטט אותן כך "שכל אחת תהיה בצד שלה".

13. כאשר מקבלים פונקציה שניתן לצמצם אותה לפני תחילת החקירה ועל-ידי כך להקל על החקירה, אתם יכולים לצמצם, אבל יש לזכור:
א. מה שקובע להמשך החקירה היא הפונקציה המקורית ותחום ההגדרה של הפונקציה המקורית. בטבלה יש להכניס את תחום ההגדרה של הפונקציה המקורית.
ב. צמצום הפונקציה המקורית עלול לבטל "חור" (אם קיים), ולכן נא לא לשכוח בסוף החקירה להוסיף את "החור" על גרף הפונקציה.

14. על מנת למצוא את ערך הפונקציה בנקודת החור שלה (ה- y) יש לצמצם את הפונקציה ורק לאחר מכן להציב את ערך ה- x בפונקציה המצומצמת.

15. בנגזרת הראשונה יש להשתדל לא להגיע לחזקות גבוהות (כי לא תוכלו לפתור את המשוואה), לכן מומלץ להוציא גורמים משותפים.

16. שימו לב לא לצמצם בצורה אוטומטית את פונקצית הנגזרת הראשונה כי אם תרצו לעשות שימוש ב- '(מונה 'y) יש לדאוג שהמכנה יהיה חיובי (בחזקה זוגית ולא אי-זוגית).
בנוסף, כאשר עושים שימוש ב '(מונה 'y) יש להוסיף הסבר מדוע מותר לעשות זאת:
"המכנה חיובי ולכן מותר לגזור רק את המונה" .

17. כאשר נתונה פונקציה בצורה של פולינום לחלק בפולינום, יש לבצע חילוק ארוך על-מנת לפשט את הפונקציה הנתונה (חילוק ארוך יכול להופיע גם באינטגרלים).
בחילוק ארוך יש להקפיד על חזקות יורדות של המחלק והמחולק.
כאשר מבצעים חילוק יש לעשות "הראשון עם הראשון".
יש להקפיד שאחרי ההחסרה עדיין החזקות יורדות.

18. כאשר פונקצית הנגזרת הראשונה מורכבת ממכפלה של ביטוי אלגברי עם פונקציה מעריכית ניתן להוריד את הפונקציה המעריכית למכנה ולנצל את השימוש ב- '(מונה 'y).
(כי המכנה חיובי).

דוגמא:

$$y' = e^{x} \cdot \left(x^{2} + 3x + 5\right) = \frac{\left(x^{2} + 3x + 5\right)}{e^{-x}}$$

'(מונה 'y) $= 2x + 3$

19. כאשר מעלים משוואה בריבוע יש לבדוק שלא הוכנסו פתרונות זרים. פתרונות זרים יש לפסול.
20. בשאלות בהם אתם מתבקשים למצוא את הפרמטרים – יש לרשום קודם כל את התנאים שמאפשרים למצוא את הפרמטרים ואז להציב ולפתור (למשל, אם יש נקודת קיצון ב- $x = 3$, התנאי הוא $y'(3) = 0$).
21. בחקירת פונקציה עם פרמטר (כשהפרמטר נצמד), עומדות לפניכם שתי אפשרויות על-מנת לזהות את סוג הקיצון: טבלה או נגזרת שנייה. (ניתן להיעזר בשתי האפשרויות באותה שאלה).
לפעמים בטבלה יש קושי להציב ערכים לפני ואחרי הנקודה החשודה, במיוחד בשאלות עם פרמטר נצמד ולכן ניתן להיעזר בנגזרת השנייה (למשל למצוא בעזרת נגזרת שנייה את סוג נקודת הקיצון ובהתאם להחליט לגבי עליה וירידה לפני הנקודה ואחריה) .
22. בתחומי עלייה וירידה מומלץ שמספר החיצים העולים והיורדים בטבלה יהיה שווה למספר התחומים של העלייה והירידה (אין לשים סימן שווה בתחומי עליה וירידה).
23. כאשר הנגזרת הראשונה לא מוגדרת בנקודה מסוימת אז המשיק בנקודה זו מאונך לציר ה- x. יש להתחשב בכך ולדייק בשרטוט הסכמתי של גרף הפונקציה.
24. למציאת נקודות חשודות בפיתול יש לבצע נגזרת שנייה מלאה (בלי קיצורים).
25. נקודת פיתול מתקבלת כאשר יש מעבר מקעירות כלפי מעלה $\cup$, לקעירות כלפי מטה $\cap$ ולהיפך.
26. את הבדיקה שאכן זו נקודת פיתול ניתן לעשות בעזרת:
א. טבלה – בדיקת הקעירות לפני ואחרי הנקודה החשודה בפיתול.
ב. הנגזרת השלישית - אם $f''(x_1) = 0$ ו- $f'''(x_1) \neq 0$, אז x_1 היא נקודת פיתול.
27. אם בפונקציה מסובך להגיע לנגזרת השלישית, ניתן לבצע קיצור: $(\text{מונה } y'')'$,
כלומר להסתפק בנגזרת המונה של הנגזרת השנייה.
28. לפני ואחרי נקודת מינימום הקעירות היא כלפי מעלה $\cup$, ולפני ואחרי נקודת מקסימום הקעירות היא כלפי מטה $\cap$.
29. בסעיף המבקש למצוא את תחומי הקעירות הניסוח והסימון המומלצים הם:
"תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ " , "תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$ " , וזאת על מנת להבהיר את הכוונה שלכם.
30. כאשר משתמשים בטבלה אחת שכוללת גם עליה וירידה וגם קעירות כלפי מעלה ומטה, למציאת תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה, ניתן "להתעלם" מנקודות הקיצון.
31. כאשר משתמשים בטבלה אחת שכוללת גם עליה וירידה וגם קעירות כלפי מעלה ומטה, למציאת תחומי עליה וירידה, ניתן "להתעלם" מנקודות הפיתול.

32. השרטוט הסכמתי:

א. שרטטו גרף גדול, מעוגל ויפה.

ב. יש להוסיף על השרטוט את סימון הצירים (ציר ה- x וציר ה- y) .

ג. בציור הגרף יש להקפיד להצמיד את גרף הפונקציה לאסימפטוטות.

ד. אם הנגזרת הראשונה לא מוגדרת בנקודה מסויימת, יש להקפיד לשרטט נכון בנקודה זו את גרף הפונקציה – המשיק לפונקציה בנקודה זו, יהיה מאונך לציר ה- x .

ה. השרטוט הסכמתי בחקירת פונקציה חייב להתאים לכל התשובות של סעיפי החקירה: יש להוסיף על השרטוט את נקודות הקיצון והפיתול (יש להתחשב בקעירות), את נקודות החיתוך עם הצירים, אסימפטוטות, החורים ואת "החושך" ולא לשכוח "ענפים" .

ו. בשאלות עם פיתול יש להקפיד לשרטט נכון את הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.

ז. ליד שרטוט גרף הפונקציה נא לרשום: "שרטוט סכמתי ללא קנה מידה".

33. בשאלות שבהן מבקשים:

"עבור אלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה במספר נקודות?" – הפיתרון הוא בהתאם לשרטוט (לא פתרון מתמטי).

34. בשאלות בהן לאחר שלבי חקירת הפונקציה $f(x)$ מוסיפים סעיף בו נאמר כי הפונקציה שחקרתם היא נגזרת של פונקציה $g(x)$ ומחפשים נקודות מינימום מקסימום של $g(x)$, אז נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x הן הנקודות החשודות במינימום ומקסימום. בנוסף, יש לראות, לפני ואחרי נקודות אלה, מתי הפונקציה חיובית ומתי היא שלילית.

35. יש לדעת את ההגדרות המתמטיות לפונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית:

פונקציה זוגית: $f(-x)=f(x)$, פונקציה אי-זוגית: $f(-x) = -f(x)$.

מבחינה גרפית פונקציה זוגית סימטרית ביחס לציר ה- y ופונקציה אי-זוגית סימטרית לשני הצירים.

36. בחקירה ניתן לנצל את תכונות הפונקציה הזוגית לצורך שרטוט או לצורך בדיקה שהשרטוט אכן נכון.

37. יש להכיר את שתי השיטות למציאת משוואת משיק מנקודה שלא על גרף הפונקציה, כפי שנלמדו בשאלון 806 .

38. יש לדעת את התנאים בהם לפונקציה ממעלה שנייה יהיו פתרון אחד, שני פתרונות ואף פתרון.

39. נוסחאות ווייטה הם: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

40. דוגמא למציאת אסימפטוטה אופקית:

נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{2x}+4e^{x}+5}{e^{2x}-6e^{x}+10}$.

מחלקים בחזקה e^{2x} **:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+4e^{x}+5}{e^{2x}-6e^{x}+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{e^{x}}+\frac{5}{e^{2x}}}{1-\frac{6}{e^{x}}+\frac{10}{e^{2x}}}=\frac{1}{1}=1$$

הופכים לחזקות שליליות:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+4e^{x}+5}{e^{2x}-6e^{x}+10}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{e^{-2x}}+\frac{4}{e^{-x}}+5}{\frac{1}{e^{-2x}}-\frac{6}{e^{-x}}+10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

ולסיום:-

זכרו כי המסמך בא לתת לכם רק הנחיות כלליות ותזכורת לחומר הלימוד ואינו פותר אתכם מחזרה ותרגול של כל החומר!

בהצלחה בבחינה!!!