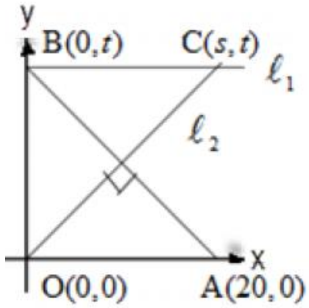
א. נסמן $C(s,t)$ **נקודה על המקום הגיאומטרי, נקודת החיתוך של הישרים** ℓ_1 **ו-** ℓ_2.



ℓ_1 **מקביל לציר ה-** x **, ובהתאם** $B(0,t)$ **היא נקודת החיתוך שלו עם ציר ה-** y.

ℓ_2 **מאונך לישר** AB **, ומכאן ש:** $m_{AB} \cdot m_{\ell_2} = -1$.

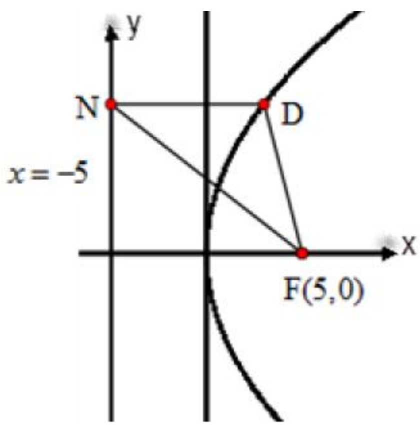
$m_{AB} = \frac{t-0}{0-20} = -\frac{t}{20}$ **,** $m_{\ell_2} = \frac{t-0}{s-0} = \frac{t}{s}$.

$$m_{AB} \cdot m_{\ell_2} = -1$$
$$-\frac{t}{20} \cdot \frac{t}{s} = -1$$
$$t^2 = 20s \quad \rightarrow \boxed{y^2 = 20x}$$

וזוהי פרבולה $y^2 = 20x$ **, שבה** $p = 10$ **, והמוקד שלה הוא** $F(5,0)$.

תשובה: הוכח .

ב. (1) אחת מתכונות הפרבולה היא שכל נקודה שעליה נמצאת במרחק שווה מהמוקד ומהמדריך.



לכן אם $k = -5$ **אזי** $x = -5$ **יהיה המדריך של הפרבולה,**

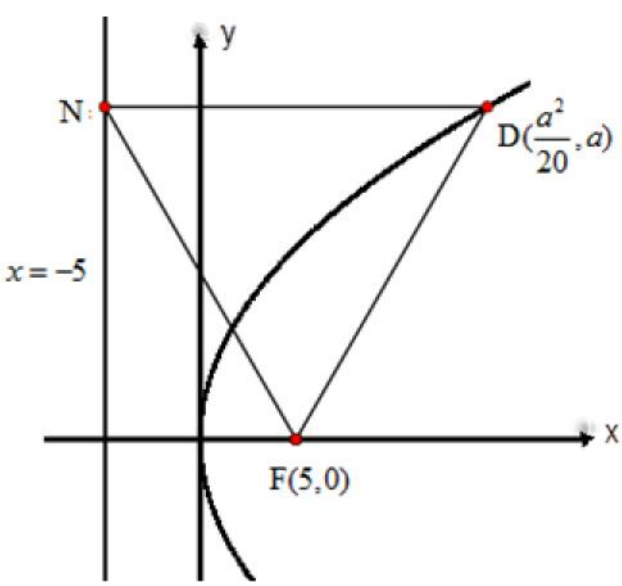
ומשולש DNF **יהיה שווה שוקיים, שבו** $DN = DF$.

תשובה: $k = -5$.

(2) נתון שהנקודה D **היא ברביע הראשון ומשולש** DNF **הוא שווה צלעות.**

מכאן שמתקיים גם $DN = NF$.

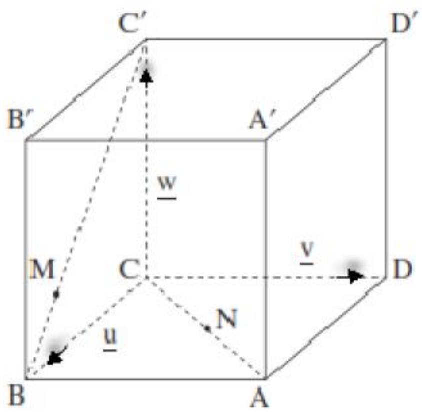
נסמן: $D(\frac{a^2}{20}, a)$ **, ולכן** $DN = \frac{a^2}{20} - (-5) = \frac{a^2+100}{20}$.



$$DN = NF$$
$$\frac{a^2+100}{20} = \sqrt{(a-0)^2 + (-5-5)^2}$$
$$\frac{(a^2+100)^2}{400} = a^2 + 100 \quad / : (a^2+100) > 0$$
$$\frac{a^2+100}{400} = 1$$
$$a^2 = 300$$
$$x_D = \frac{300}{20} = 15, \quad y_D = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \quad \rightarrow \boxed{D(15, 10\sqrt{3})}$$

תשובה: $D(15, 10\sqrt{3})$.

א. $ABCDA'B'C'D'$ **היא קובייה, מכאן שמקצועותיה שווים זה לזה, ומאונכים זה לזה.**



$\boxed{\overrightarrow{CB}=\underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}|=a}$ $\boxed{\underline{u}^2=a^2}$

$\boxed{\overrightarrow{CD}=\underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}|=a}$ $\boxed{\underline{v}^2=a^2}$

$\boxed{\overrightarrow{CC'}=\underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}|=a}$ $\boxed{\underline{w}^2=a^2}$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \quad , \quad \underline{u}\cdot\underline{w}=0 \quad , \quad \underline{v}\cdot\underline{w}=0$

$$\overrightarrow{AN}=s\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AN}=s(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$

$$\boxed{\overrightarrow{AN}=-s\underline{u}-s\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BC'}$$

$$\overrightarrow{BM}=t(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'})$$

$$\boxed{\overrightarrow{BM}=-t\underline{u}+t\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{MN}=t\underline{u}-t\underline{w}+\underline{v}-s\underline{u}-s\underline{v}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MN}=(t-s)\underline{u}+(1-s)\underline{v}-t\underline{w}}$$

נתון ש- $t\neq 0$ **, ולכן הנקודה** M ***לא* מתלכדת עם הנקודה** B **, ובהתאם** MN ***לא* מוכל במישור** $AA'B'B$ **.**

MN **יקביל למישור הפאה** $AA'B'B$ **,**

אם $\overrightarrow{MN}$ **יהיה קומבינציה ליניארית של הווקטורים הפורשים את הפאה,** $\underline{v}$ **ו-** $\underline{w}$ **.**

לכן $t-s=0$ **, ומכאן ש-** $t=s$ **ו-** $\frac{s}{t}=1$ **.**

תשובה: $\frac{s}{t}=1$ **.**

ב. נתון $s=\frac{1}{2}$, $t=\frac{1}{4}$ **ובהתאם** $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{4}\underline{w}$ **.**

נמקם את הקובייה במערכת צירים,

כאשר המקצועות CB **,** CD **,** 'CC **מתלכדים עם ציר** x **, ציר** y **, ציר** z **, בהתאמה.**

נסמן את אורך מקצועות הקובייה ב- a **, ובהתאם:** $\underline{w}=(0,0,a)$, $\underline{v}=(0,a,0)$, $\underline{u}=(a,0,0)$

מכאן ש- $C(0,0,0)$ **,** $A(a,a,0)$ **,** $B(a,0,0)$ **,** $C'(0,0,a)$ **,** $N(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)$ **(על-פי אמצע קטע),**

ו- $M(\frac{3a}{4},0,\frac{a}{4})$ **(על-פי חלוקת קטע ביחס נתון),**

ומשוואת המישור ABCD **, הנפרש על ידי ציר** x **וציר** y , **היא** $z=0$ **.**

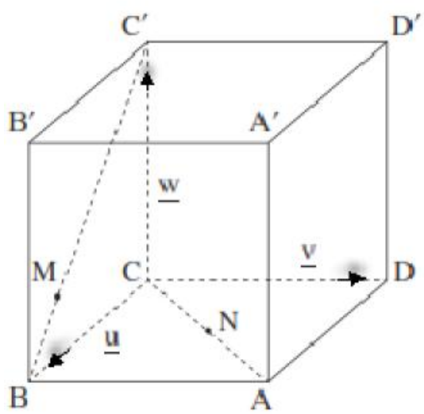
כמו כן $\overrightarrow{MN}=\underline{x}=(-\frac{1}{4}a,\frac{1}{2}a,-\frac{1}{4}a)$ **,**

וההצגה הפרמטרית של הישר MN **היא:** $\ell_{MN}=\underline{x}=(\frac{3a}{4},0,\frac{a}{4})+r(1,-2,1)$.

נמצא את הזווית שבין MN **למישור** ABCD **.**

$$\sin\sim=\frac{|(1,-2,1)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\boxed{\sim=24.09°}$$



תשובה: הזווית שבין MN **למישור** ABCD **היא בת** 24.09° **.**

ג. ההצגה הפרמטרית של הישר AB **, המקביל לציר ה-** y **,**

היא $\ell_{AB}=\underline{x}=(a,a,0)+q(0,1,0)$ **.**

ההצגה הפרמטרית של הישר MN **היא** $\ell_{MN}=\underline{x}=(\frac{3a}{4},0,\frac{a}{4})+r(1,-2,1)$ **.**

קל לראות שהישרים אינם מקבילים, ו/או מתלכדים, כי וקטורי הכיוון אינם תלויים זה בזה,

ולכן המצב ההדדי הוא שהם נחתכים, או מצטלבים.

נחפש פתרון בעזרת מערכת של שלוש משוואות, על ידי השוואת שיעורי הנקודות הטיפוסיות שעל הישרים.

$$(1)\quad \frac{3a}{4}+r=a \quad \rightarrow a=4r$$

$$(2)\quad -2r=a+q$$

$$(3)\quad \frac{a}{4}+r=0 \quad \rightarrow a=-4r$$

על פי משוואות (1) ו- (3) נקבל ש- $r=0$ **ובהתאם** $a=0$ **ובמקרה זה אין קובייה, משמע שאין פתרון.**

המסקנה שלא קיימת נקודת חיתוך בין הישרים, והמצב ההדדי שלהם הוא שהם מצטלבים.

<u>פתרון חלופי – גיאומטרי</u>

הנקודות A **,** B **ו-** N **נמצאות על מישור הבסיס** $z=0$ **.**

הנקודה M ***לא*** **נמצאת על מישור זה.**

כלומר ארבעת הנקודות אינן על מישור אחד, ולכן AB **ו-** MN **בהכרח מצטלבים.**

(אם שני ישרים נחתכים, מקבילים או מתלכדים – אז בהכרח הם במישור אחד.)

תשובה: הישרים מצטלבים.

א. נצייר מעגל, שמרכזו בראשית הצירים וחוסם משולש שווה צלעות .

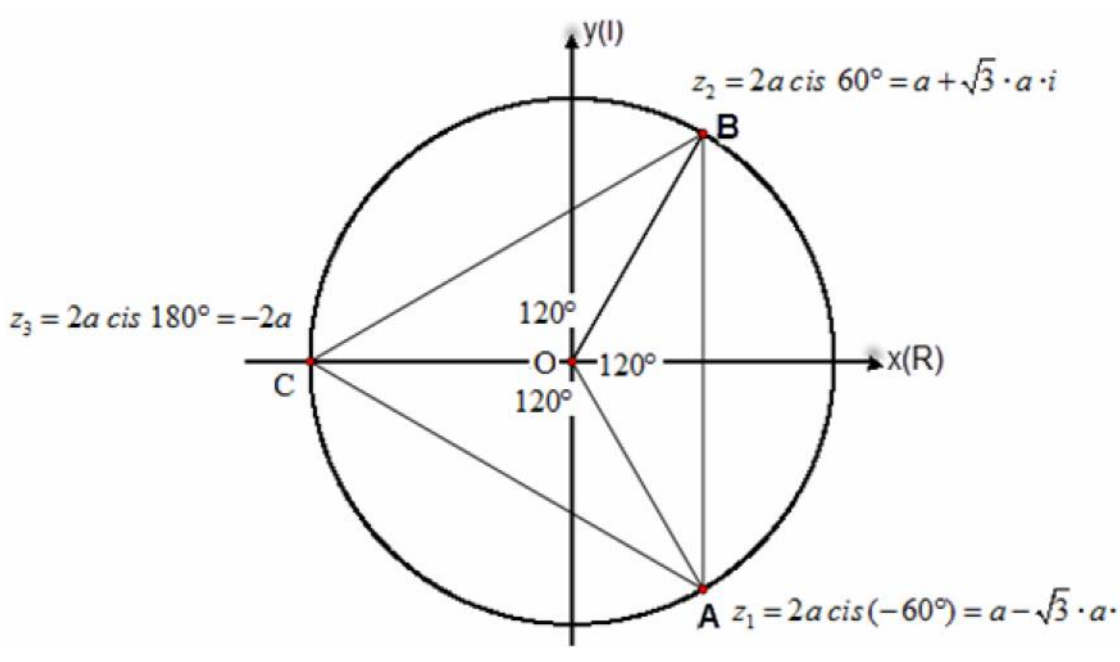
נתון: $z_1 = a - \sqrt{3}\cdot a\cdot i$ **ברביע השני, (** $a>0$ **פרמטר) , מתאים לקדקוד** A **.**

$$\tan\theta_{\mathrm{A}} = \frac{-a\sqrt{3}}{a} = -\sqrt{3}$$
$$\theta_{\mathrm{A}} = -60^\circ + 180^\circ k$$
$$\theta_{\mathrm{A}} = -60^\circ \quad 4th \quad quadrant$$
$$r = \sqrt{a^2 + (-a\sqrt{3})^2} = \sqrt{4a} = 2a$$
$$\boxed{z_1 = 2a\, cis(-60^\circ)}$$

כיוון ש- $\Delta\mathrm{ABC}$ **שווה צלעות, שחסום במעגל, הרי שהזוויות המרכזיות שוות כ"א ל-** 120°**.**

$$\sphericalangle \mathrm{AOB} = 120^\circ$$
$$\theta_{\mathrm{B}} = -60^\circ + 120^\circ = 60^\circ \quad \rightarrow \boxed{z_2 = 2a\, cis\; 60^\circ = a + \sqrt{3}\cdot a\cdot i}$$
$$\sphericalangle \mathrm{BOC} = 120^\circ$$
$$\theta_{\mathrm{C}} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \quad \rightarrow \boxed{z_3 = 2a\, cis\; 180^\circ = -2a}$$

תשובה: $z_2 = 2a\, cis\; 60^\circ = a + \sqrt{3}\cdot a\cdot i$, $z_3 = 2a\, cis\; 180^\circ = -2a$ **.**



ב. נתון: $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$.

$$2a\ cis\ 180° = \frac{(2a\ cis\,(-60°))^3}{4} \quad / : 2a > 0$$

$$-8a = 8a^3 cis(-60° \cdot 3) \quad / : 8a^2 > 0$$

$$-1 = a\ cis\ 180°$$

$$-1 = -a$$

$$\boxed{a = 1}$$

תשובה: $a = 1$.

ג. המספר : z_1^{6n+5} **מתאים לנקודה** P **במישור גאוס.**

על-מנת להראות שהנקודה B **, המתאימה ל-** $z_2 = 2a\ cis\ 60°$ **, נמצאת על הקרן** OP **,**

יש להראות שגם הארגומנט של z_1^{6n+5} **הוא** $60°$ **.**

$$z_1^{6n+5} = (2a\ cis\,(-60°))^{6n+5}$$

$$z_1^{6n+5} = (2a)^{6n+5} cis\ (-60°)^{6n} \cdot cis(-60°)^5$$

$$z_1^{6n+5} = (2a)^{6n+5} cis\ (-60° \cdot 6)^n \cdot cis\ (-60° \cdot 5)$$

$$z_1^{6n+5} = (2a)^{6n+5} cis\ (-360°)^n \cdot cis\ (-300°)$$

$$\boxed{z_1^{6n+5} = (2a)^{6n+5} cis\ (60°)}$$

תשובה: הוכח.

א. נתונות הפונקציה $g(x)=2x^2+c$ **(** c **פרמטר) והפונקציה** $f(x)=e^{g(x)}=e^{2x^2+c}$ **.**

נתון כי: $g'(2)=f'(2)$ **.**

$g'(x)=4x$ **.** $f'(x)=4xe^{2x^2+c}$ **.**

$$g'(2)=f'(2)$$
$$4\cdot 2=4\cdot 2e^{2\cdot 2^2+c} \quad /:8$$
$$1=e^{8+c}$$
$$8+c=0$$
$$\boxed{c=-8}$$

תשובה: $c=-8$.

ב. $g(x)=2x^2-8$ **,** $f(x)=e^{g(x)}=e^{2x^2-8}$ **.**

(1) נוכיח ש $f'(x)$ **פונקציה אי-זוגית.**

$$f'(x)=4xe^{2x^2-8}$$
$$f'(-x)=4(-x)e^{2(-x)^2-8}$$
$$f'(-x)=-4xe^{2x^2-8}$$
$$f'(-x)=-f'(x)$$

והפונקציה אי-זוגית, כלומר סימטרית לראשית הצירים. (ניתן לשים לב ש $f(x)$ **זוגית.)**

תשובה: הוכח.

(2) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך בין $f'(x)$ **ל-** $g'(x)$ **.**

$$4xe^{2x^2-8}=4x \quad /:4$$
$$xe^{2x^2-8}-x=0$$
$$x(e^{2x^2-8}-1)=0$$
$$x=0 \ \rightarrow g'(0)=4\cdot 0=0 \ \rightarrow \boxed{(0,0)}$$
$$e^{2x^2-8}=1$$
$$2x^2-8=0$$
$$x=2 \ \rightarrow g'(2)=4\cdot 2=8 \ \rightarrow \boxed{(2,8)}$$
$$x=-2 \ \rightarrow g'(-2)=4\cdot(-2)=-8 \ \rightarrow \boxed{(-2,-8)}$$

הערה – את שיעורי הנקודה $(-2,-8)$ **ניתן היה לנמק בעזרת אי-הזוגיות של** $f'(x)$ **.**

תשובה: $(0,0)$ **,** $(2,8)$ **,** $(-2,-8)$ **.**

(3) נמצא לאילו ערכי x $f'(x) > g'(x)$ בעזרת הצבות.

$f'(x) = 4xe^{2x^2-8} \quad g'(x) = 4x$

$f'(-3) = 4\cdot(-3)\cdot e^{2(-3)^2-8} = -264317 \quad g'(-3) = 4\cdot(-3) = -12 \quad \rightarrow f'(x) < g'(x)$

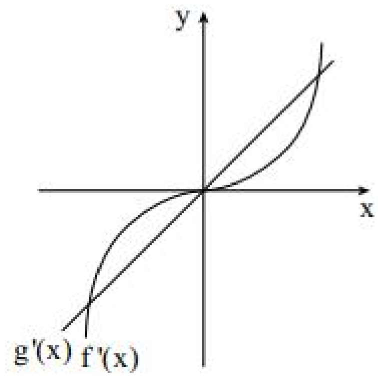
$f'(-1) = -9.9\cdot 10^{-3} \quad g'(-1) = -4 \quad \rightarrow f'(x) > g'(x)$

$f'(1) = -9.9\cdot 10^{-3} \quad g'(1) = 4 \quad \rightarrow f'(x) < g'(x)$

$f'(3) = 264317 \quad g'(3) = 12 \quad \rightarrow f'(x) > g'(x)$

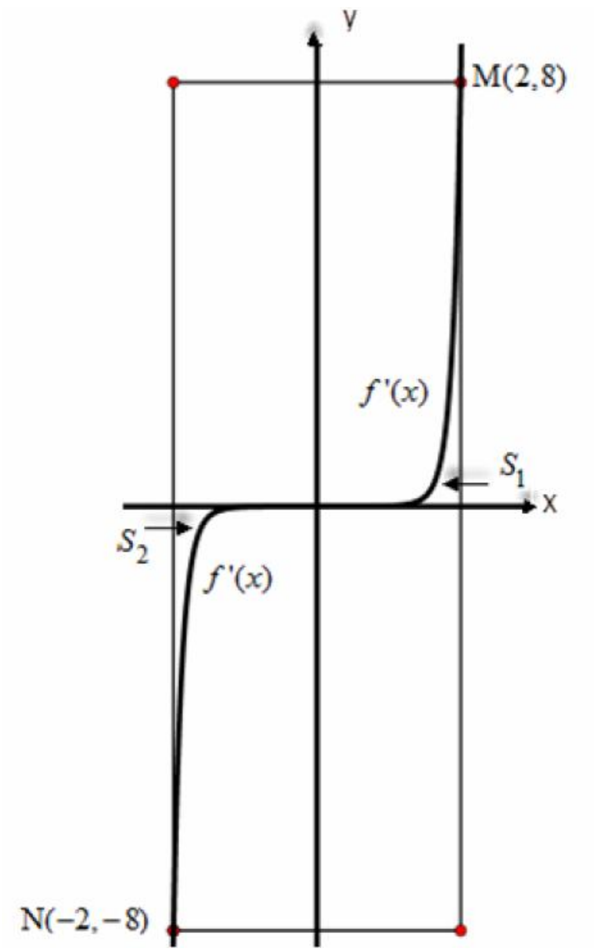
תשובה: $x > 2$ **, או** $-2 < x < 0$ **.**

(4) סרטוט מתאים.



ג. נתון $N(-2,-8)$, $M(2,8)$, שתיים מנקודות החיתוך שמצאנו, הנמצאות על גרף הפונקציה האי-זוגית $f'(x)$.

נסרטט מלבן, שהישר שמחבר את שתי הנקודות הוא אלכסון שלו, ושצלעותיו מקבילות לצירים.



המלבן הגדול מחולק לארבעה מלבנים שווי שטח (16 יח"ר).

עקב אי הזוגיות של $f'(x)$, הרי ש- $S_1 = S_2$, כי אלו שטחים בין 2 ל- 0 , ובין 0 ל- -2 (2 מספר נגדי ל- -2),

ושניהם סימטריים לציר ה- x .

מכאן שאם נסתכל על שני המלבנים העליונים, הרי שהשטח שנגרע מהם (S_1) מימין,

הוסף להם משמאל למטה ((S_2)) – ומכאן שהשטח שמעל ל- $f'(x)$ בתוך המלבן,

שווה לשטח שמתחת ל- $f'(x)$ בתוך המלבן.

מכאן, שגרף הפונקציה $f'(x)$ מחלק את המלבן לשני חלקים שווים בשטחם.

תשובה: הוכח.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x+m\cdot\ell n(\frac{1}{x})$.

נעבד את הפונקציה על פי חוקי הלוגריתמים.

$$f(x)=x+m\cdot(\ell n(1)-\ell n(x))$$
$$f(x)=x+m\cdot(0-\ell n(x))$$
$$\boxed{f(x)=x-m\ell n\,x}$$

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x>0$.

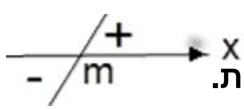
ב. נתון כי לפונקציה $f(x)=x-m\ell n\,x$ **יש נקודת קיצון.**

(1) נמצא את תחום הערכים של m .

$$f'(x)=1-\frac{m}{x}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{x-m}{x}}$$
$$x-m=0$$
$$x=m$$

נשים לב כי מכנה הנגזרת חיובי,

והביטוי שבמונה מיוצג על ידי ישר עולה, העובר משליליות לחיוביות.



לכן אם $x=m$ **הוא בתחום ההגדרה, נקבל ש-** $m>0$ **, וזו נקודת מינימום.**

תשובה: $m>0$.

(2) שיעורי נקודת הקיצון, $(m,m-m\ell n\,m)$.

תשובה: $(m,m-m\ell n\,m)$ **, מינימום.**

ג. הנקודה P **נמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)=x-m\ell n\,x$ **, ושיעוריה אינם תלויים ב-** m .

(1) נדרש שהפרמטר m ***לא*** **יופיע בשיעור ה-** y **של הפונקציה, לכן** $\ell n\,x=0$ **ומכאן ש-** $x_P=1$.

תשובה: $P(1,1)$.

(2) על פי תת סעיף א(2) שיעורי נקודת המינימום הם $(m,m-m\ell n\,m)$ **, ולכן** $m=1$.

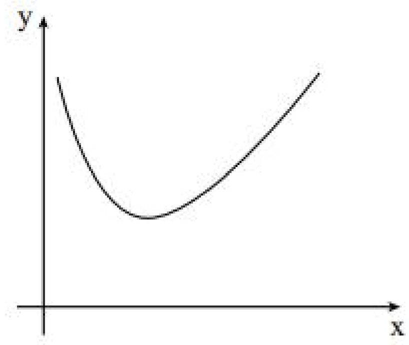
תשובה: $m=1$.

ד. $f(x)=x-\ell n\,x$ **.**

הציב $x=0.000001$ **ונקבל** 13.8**, כלומר שאיפה ל-** $+\infty$ **, ו-** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

הציב $x=1000000$ **ונקבל** 999986**, כלומר שאיפה ל-** $+\infty$**, ואין אסימפטוטה אופקית מימין.**

הסרטוט המתאים:



ה. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f(x)-x}{x}$

$$g(x)=\frac{x-\ell n\,x-x}{x}$$

$$\boxed{g(x)=-\frac{\ell n\,x}{x}}$$

נחשב את האינטגרל המסוים, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$\int_1^e g(x)dx=\int_1^e -\frac{\ell n\,x}{x}=\int_1^e (-\ell n\,x\cdot\frac{1}{x})dx=$$

$$=-\frac{(\ell n\,x)^2}{2}\Big]_1^e=-\frac{(\ell n\,e)^2}{2}-(-\frac{(\ell n\,1)^2}{2})=-\frac{1}{2}-0=-\frac{1}{2}$$

תשובה: $-\frac{1}{2}$ **.**