סיכום - מספרים מרוכבים - שאלון 807

1. יש לשים לב באיזה רביע נמצא המספר המרוכב כאשר רוצים להפוך אותו לצורתו הטריגונומטרית.
2. ההצגה הקרטזית (האלגברית) של מספר מרוכב היא: $z = x + iy$.

   ההצגה הקוטבית (הטריגונומטרית) של מספר מרוכב היא: $z = r\,\text{cis}\alpha$.

   הארגומנט של מספר מרוכב היא הזווית α.
3. ניתן להשתמש, לצורך בדיקה בלבד, במחשבון על מנת להפוך את המספר המרוכב לצורתו האחרת. חובה להראות את כל התהליך של מציאת הרדיוס והזווית (הארגומנט).
4. שני מספרים מרוכבים, בצורתם האלגברית, שווים זה לזה אם החלקים הממשיים בשניהם שווים וגם החלקים המדומים בשניהם שווים.
5. שני מספרים מרוכבים, בצורתם הטריגונומטרית, שווים זה לזה אם יש להם אותו ערך מוחלט (אותו הרדיוס) והארגומנטים שלהם נבדלים זה מזה בכפולות שלמות של 360°:

$$\sin(\alpha + 360k) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 360k) = \cos\alpha$$

6. ערך מוחלט של מספר מרוכב הוא הרדיוס כלומר אם $z = x + iy$ אז $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
7. כאשר $z = x + iy$ אז המספר הצמוד לו הוא $\bar{z} = x - iy$.
8. כאשר $z = r\,\text{cis}\alpha$ אז המספר הצמוד לו הוא $\bar{z} = r\,\text{cis}(-\alpha)$.
9. זכרו! $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
10. משפט דה-מואבר: $(r\text{cis}\theta)^n = r^n \cdot \text{cis}n\theta$. המשפט נכון גם עבור n שלילי.
11. הצורה הטריגונומטרית של מספר מרוכב יעילה בהעלאה בחזקה ובהוצאת שורש.

    בהעלאה בחזקה <u>אין</u> להוסיף את $360^\circ k$ ובהוצאת שורש <u>חובה</u> להוסיף את $360^\circ k$ וזאת על-מנת לקבל עבור כל k את הפתרון שלו.
12. אין להשאיר מספר מרוכב במכנה ולצורך כך יש להכפיל את המונה והמכנה בצמוד של המספר המופיע במכנה.
13. הערך המוחלט של המספר המרוכב והצמוד שלו זהה $|z| = |\bar{z}|$. (יש להם אותו רדיוס).

14. כל שני מספרים מרוכבים z_1 ו- z_2 השונים מאפס מקיימים:

$$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$$
$$\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}$$
$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1\cdot z_2}$$
$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

ניתן להכליל זאת על יותר משני מספרים מרוכבים לגבי פעולות החיבור והכפל.

לדוגמא: $\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=\overline{z_1+z_2+z_3}$. , $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\overline{z_3}=\overline{z_1\cdot z_2\cdot z_3}$.

15. כאשר מוציאים שורש ריבועי ממספר מרוכב התוצאה שתתקבל היא גם מספר מרוכב.
מומלץ לסמן את התוצאה של השורש ב: $x+iy$, להעלות בריבוע, ולפתור שתי משוואות עם שני נעלמים. זכרו, ש- x ו- y הם מספרים ממשיים.
(בהוצאת שורש ריבועי ניתן להשתמש גם במשפט דה-מואבר).

16. כאשר מבקשים למצוא פתרון יחיד למשוואה ריבועית עם פרמטר,
יש לבדוק את הקו הישר $a=0$ וכן לבדוק את הפרבולה: $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$ וגם ,
וכך למצוא את הפרמטר.

כדי למצוא את הפתרון היחיד המתאים לפרמטר הנ"ל, מומלץ להשתמש בקשר: $z=\frac{-b}{2a}$

(זכרו! כאשר $\Delta=0$ הפתרון היחיד הוא $z=\frac{-b}{2a}$).

17. כאשר יש לחסום מצולע במעגל ומבקשים למצוא את הקודקודים שלו במישור של גאוס, יש לזכור שהרדיוס בכל הקודקודים זהה. את הזווית (הארגומנט) של כל קודקוד יש לקבוע גיאומטרית בהתאם לזוויות ההיקפיות והמרכזיות של המצולע.
(הקפיצות מקודקוד לקודקוד בהתאם לזווית המרכזית שבין הקודקודים).

18. כאשר מחפשים במישור של גאוס נקודות חיתוך בין ישרים ו/או חיתוך של ישר עם מעגל, ניתן לפתור את התרגיל בשיטות של הנדסה אנליטית ולאחר מכן להוסיף לכל ערך של y את i (הציר המדומה) .

19. זכרו! אי-שוויונים לא ניתן לפתור במספרים מרוכבים, אלא עם ערכים מוחלטים, כלומר:
אין במספרים מרוכבים $z_1 > z_2$ אבל יש $|z_1| > |z_2|$.

20. פירוק של המשוואה הריבועית: $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
z_1 ו- z_2 הם שורשים של המשוואה הריבועית.

21. סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא: $s_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ המגבלה היא $q \neq 1$.
ולכן כאשר $q = 1$ אין להשתמש בנוסחא זו, והסכום יהיה: $s_n = a_1 \cdot n$.

22. נוסחאות וייטה הן: $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{c}{a}$
יש לזכור את הזהות: $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2 \cdot z_1 \cdot z_2$.

23. כפל של שני מספרים בצורתם הקוטבית הוא:
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \text{cis}\theta_1 \cdot r_2 \text{cis}\theta_2 = r_1 r_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.
ולכן כדוגמא ניתן להפוך את $\text{cis}(\alpha + 120^\circ)$ ל- $\text{cis}\alpha \cdot \text{cis}120^\circ$.

24. חילוק של שני מספרים בצורתם הקוטבית הוא: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 \text{cis}\theta_1}{r_2 \text{cis}\theta_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.

25. כאשר יש למצוא מקום גיאומטרי במישור של גאוס, יש לסמן את המספר המרוכב z ב- $z = x + iy$, ולמצוא קשר בין x ל- y. המקום הגיאומטרי יכול להיות גם שטח סגור שכולל את שפת השטח הסגור.

26. בשורשי היחידה מסדר n הכוונה היא למצוא את השורש ה- n של היחידה (אחד).
לדוגמא: $k = 0,1,2,3,4,5,6,7$, $z_k = \text{cis}(45k)$, $z^8 = 1 = 1\text{cis}(0^\circ + 360k)$.
כך מקבלים את כל 8 הפתרונות של המשוואה הנ"ל $(k = 0,1,2.........(n-1))$.

27. שורשי היחידה מהווים סדרה הנדסית, בדוגמא בסעיף 26 נקבל:
$$q = \frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{\text{cis}(45(k+1))}{\text{cis}(45k)} = \text{cis}45.$$
המנה קבועה בין שני מספרים עוקבים ולכן שורשי היחידה מהווים סדרה הנדסית.

28. סכום שורשי היחידה מסדר n שווה אפס, כי:

$$z^n = 1 \quad \Rightarrow \quad z_k = cis\left(\frac{360k}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad q = \frac{z_{k+1}}{z_k} = cis\left(\frac{360}{n}\right).$$

הביטוי $q^n - 1$, אשר נמצא בתוך הנוסחא לסכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית,

יתאפס כי: $q^n = \left(cis\frac{360}{n}\right)^n = cis360^\circ = 1$.

29. בתוצאה הסופית מומלץ לתת את שתי צורות ההצגה - אלגברית וטריגונומטרית, אלא אם נאמר אחרת בשאלה.

ולסיום:-

זכרו כי המסמך בא לתת לכם רק הנחיות כלליות ותזכורת לחומר הלימוד ואינו פותר אתכם מחזרה ותרגול של כל החומר!
בהצלחה בבחינה!!!

