סיכום - ווקטורים - שאלון 807

1. כאשר מביעים ווקטור חובה להגדיר את המסלול שלו, ורק לאחר מכן להציב את ווקטורי הבסיס.
2. נא הקפידו שהסקלר יופיע לפני הווקטור.
3. תשובה סופית של ווקטור צריכה להינתן אחרי שחיברתם את כל הסקלרים של אותו ווקטור (כינוס איברים). לדוגמא: $\overrightarrow{AD} = t\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} = \left(t + \frac{1}{2}\right)\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$
4. אם $\underline{u}$ ו - $\underline{v}$ הם שני וקטורים על אותו ישר אז קיים t כך שמתקיים $\underline{v} = t\underline{u}$.
5. אם קיים t כך ש: $\underline{v} = t\underline{u}$ אז שני הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.
6. אם הווקטורים של שתי צלעות במשולש יוצאים מאותו הקודקוד, אז ווקטור התיכון, היוצא מאותו קודקוד שווה למחצית סכומם של ווקטורי שתי הצלעות.
7. מפגש התיכונים במשולש הוא מרכז הכובד, והוא $\frac{2}{3}$ מווקטור התיכון: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \bullet \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$.
8. במידה ווקטורי הבסיס מאונכים זה לזה, חובה לרשום תחילה: $\underline{u} \bullet \underline{v} = \underline{u} \bullet \underline{w} = \underline{v} \bullet \underline{w} = 0$.
9. כאשר מבקשים את $\measuredangle ABC$ ניתן לקחת את הווקטורים $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ ולמצוא את הזווית ביניהם, או את הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$. כלומר "שניהם נכנסים פנימה או שניהם יוצאים החוצה".
10. כאשר בשאלה לא מגדירים את מקצוע הקובייה יש לסמן אותו ב- a.
   כאשר מבקשים למצוא ישר חיתוך בין שני מישורים בקובייה זו, ייתכן שישר החיתוך יבוטא כפונקציה של a.
11. אורך מינימאלי של ווקטור, שהובע על ידי t, ניתן לחישוב בעזרת חשבון דיפרנציאלי או על ידי מכפלה סקלרית: המרחק המינימאלי הוא האנך - ולכן המכפלה הסקלרית היא אפס.
12. חישוב <u>הזווית המינימאלית</u> – יש למצוא את קוסינוס הזווית כפונקציה של t, ולדרוש מהפונקציה המתקבלת <u>מקסימום</u>, וזאת מכיוון שפונקצית הקוסינוס היא פונקציה יורדת בתחום 0° ועד 180°. (ולהיפך).
13. אם עליכם למצוא זווית בין שתי צלעות במשולש כאשר נתונים שלושת הצלעות שלו, מותר לכם להשתמש במשפט הקוסינוס למציאת הזווית (זכרו: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$).
14. זכרו את המשפט לגבי ווקטורים שמוצאם בנקודה וסופם על ישר:
   "יהיו $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ שלושה ווקטורים בעלי מוצא משותף O .
   הנקודה P נמצאת על הישר AB אם ורק אם ניתן להציג את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ בצורה:
   $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ כך ש: $\underline{a + b = 1}$."
   (a מוכפל בווקטור הצלע הרחוקה ממנו וגם b מוכפל בווקטור הצלע הרחוקה ממנו).

15. אם מתקיים: $\overrightarrow{OP} = a\cdot\overrightarrow{OA} + b\cdot\overrightarrow{OB}$ כך ש: $\underline{a+b=1}$, אז:

א. כאשר שני הסקלרים a ו- b חיוביים אז הנקודה P נמצאת בתוך הקטע AB.

ב. כאשר הסקלר a חיובי וגדול מאחד, והסקלר b שלילי, אז הנקודה P נמצאת על המשך הקטע AB מהצד של הנקודה A .

ג. כאשר הסקלר b חיובי וגדול מאחד, והסקלר a שלילי, אז הנקודה P נמצאת על המשך הקטע AB מהצד של הנקודה B .

16. הסקלרים a ו- b מראים גם את יחס שבו הנקודה P מחלקת את הקטע AB: $\frac{AP}{PB} = \frac{b}{a}$.

17. חלוקת קטע ביחס נתון $\frac{AP}{PB} = \frac{k}{L}$:

זכרו כי ניתן למצוא את הנקודה P לא רק בעזרת הנוסחא בהנדסה אנליטית, אלא גם בעזרת ווקטורים כלומר: $L\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PB}$.

יש להקפיד על כתיבה נכונה של $\frac{AP}{PB}$ כאשר רוצים למצוא באמצעות ווקטורים את נקודה P. (<u>ולא</u> כפי שמופיע בדף הנוסחאות החדש של משרד החינוך בפרק הנדסה אנליטית)

18. זכרו את המשפט לגבי ווקטורים שמוצאם בנקודה אחת וסופיהם על מישור:

"יהיו $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP}$ ארבעה ווקטורים בעלי מוצא משותף O. כך שהנקודות A,B,C אינן על ישר אחד. הנקודה P נמצאת במישור ABC אם ורק אם ניתן להציג את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ בצורה:

$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$ כך ש: $\underline{a+b+c=1}$."

(אם כל הפרמטרים a , b , c חיוביים וסכומם 1 אז הנקודה P נמצאת על הפאה ABC).

19. משפט: " הווקטור (a , b , c) ניצב תמיד למישור $ax+by+cz+d=0$ ".

ווקטור זה נקרא גם <u>ווקטור הנורמל</u> למישור.

20. מישור המקביל לציר ה-x יהיה מהצורה: $by+cz+d=0$.

21. המישור הנקבע על ידי הצירים x ו- y יהיה מהצורה: z=0

22. ווקטור יחידה בכיוון של ווקטור נתון $\underline{u}$ הוא: $\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$ (מחלקים את הווקטור באורכו).

ניתן לעשות שימוש בווקטור יחידה הנ"ל על-מנת למצוא, למשל, ווקטור הנמצא על חוצה הזווית בין שני ווקטורים:

הרעיון מבוסס על המשפט: "האלכסון במעוין חוצה את הזווית שבין שתי צלעות סמוכות".

אם $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הינם ווקטורי הצלעות הסמוכות במעוין, אז הווקטור $\underline{w} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} + \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$

הוא חוצה הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. הווקטור שחוצה את הזווית המשלימה ל- 180°

יהיה מהצורה: $\underline{d}=\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}-\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$ (הווקטורים $\underline{d}$ ו- $\underline{w}$ מאונכים זה לזה).

23. שימוש נוסף בווקטור היחידה הוא מציאת מישור החוצה זווית בין שני מישורים נחתכים והעובר דרך ישר החיתוך שלהם:
ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יהיו הווקטורים הנורמלים של המישורים. ווקטור $\underline{w}$ יהיה ווקטור הנורמל למישור שצריך למצוא.

24. דרך נוספת למציאת מישור החוצה זווית בין שני מישורים נחתכים והעובר דרך ישר החיתוך שלהם מסתמכת על מרחק של נקודה ממישור:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2+{c_1}^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2+{c_2}^2}}$$ (יש שני מישורים מתאימים לכך).

25. ווקטור הנמצא על חוצה הזווית בין שני ווקטורים ניתן למצוא גם על-ידי שימוש במשפט חוצה הזווית.

26. על מנת לבדוק שמקבילון הוא תיבה יש לבדוק ניצבות בשלושה מישורים שונים.

27. זכרו שניתן להפוך את המשוואה הקנונית של הישר: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t$,
לצורתו הפרמטרית (כאשר (x_1,y_1,z_1) ו- (x_2,y_2,z_2) הן שתי נקודות על הישר).

28. זכרו, רק למצב הדדי בין שני ישרים <u>במרחב</u> מתווסף המקרה של <u>ישרים מצטלבים</u>.

29. המרחק בין שני ישרים מצטלבים, זהו המרחק שבין ישר אחד לבין המישור העובר דרך הישר השני והמקביל לישר הראשון (מרחק בין נקודה שעל הישר האחד מהמישור).

30. המרחק בין שני ישרים מצטלבים זהו המרחק המינימלי שבין הישרים המצטלבים.

31. בישרים מצטלבים, למציאת הנקודה הנמצאת על ישר האחד (ℓ_1) ומרחקה מהישר השני (ℓ_2) הוא מינימלי יש:
א. להעביר מישור π_2 המכיל את ℓ_2 והמקביל לישר ℓ_1.
ב. להעביר מישור π_1 העובר דרך הישר ℓ_2 והמאונך למישור π_2.
ג. למצוא את נקודת החיתוך בין ℓ_1 למישור π_1, נקודה זו היא הנקודה הקרובה ביותר לישר ℓ_2 והנמצאת על הישר ℓ_1.

32. בעיות בנושא מרחק נקודה מישר הכוללות פרמטרים מומלץ לפתור בעזרת המכפלה הווקטורית.

33. כאשר נתונה הצגה פרמטרית של ישר ונאמר שהוא חותך ישר אחר, שאת הצגתו הפרמטרית עליכם למצוא, יש לקחת נקודה אופיינית של הישר הנתון וזו תהיה גם הנקודה על הישר שאותו עליכם למצוא.

34. במידה ורוצים לבחון האם שני ישרים הם מתלכדים או מקבילים, בנוסף לבדיקה הרגילה של מצב הדדי בין שני ישרים (השוואת הישרים), ניתן לבצע הפרש בין שתי נקודות שעל ישרים: אם ווקטור ההפרש הוא באותו כיוון של ווקטור הכיוון של הישרים - אז הישרים מתלכדים, ואם ווקטור ההפרש אינו באותו כיוון של ווקטור הכיוון של הישרים - אז הישרים מקבילים. (דרך זו יכולה לעזור בשאלות עם פרמטרים).

35. את ווקטור הכיוון של הישר ניתן לשנות לצורה קומפקטית יותר (צמצום), אך אין לגעת בנקודה, אסור לצמצם את ערכיה. (במידה ואתם לא בטוחים בעצמכם אל תצמצמו בכלל).

36. זכרו את המשפט: "אם שני הווקטורים $\underline{u}$ ו - $\underline{v}$ הם בעלי מוצא משותף ואינם על ישר אחד ו- $\underline{w}$ הוא ווקטור המקיים $\underline{w} = t\underline{u} + s\underline{v}$ אז קיימות שתי אפשרויות:

א. $\underline{w}$ נמצא במישור הנפרש על-ידי שני הווקטורים $\underline{u}$ ו - $\underline{v}$.

אם $\underline{w}$ יוצא מנקודה הנמצאת במישור אז $\underline{w}$ נמצא במישור.

ב . $\underline{w}$ נמצא על ישר המקביל למישור הנפרש על-ידי שני הווקטורים $\underline{u}$ ו - $\underline{v}$.

אם $\underline{w}$ יוצא מנקודה שאינה במישור הנפרש על ידי שני הווקטורים, אז $\underline{w}$ מקביל למישור".

37. שני ווקטורים הפורשים את המישור חייבים להיות שונים, ולכן יש לשים לב שבהצגה הפרמטרית של המישור שני הווקטורים לא יהיו באותו הכיוון. (אחרת נקבל ישר ולא מישור).

38. המישור נקבע על ידי ארבעה מצבים: שני ישרים נחתכים, שלוש נקודות שלא על ישר אחד, ישר ונקודה שמחוצה לו, ושני ישרים מקבילים.

בכל אחד מהמצבים הנ"ל יש לדעת למצוא את הצורה הפרמטרית של המישור וכן את משוואת המישור.

39. יש לדעת את שיטות המעבר ממשוואה של מישור להצגה הפרמטרית שלו ולהיפך (כולל מגבלות שקיימות).

40. כאשר אתם מתבקשים להוכיח מקבילות בין ישר למישור - לא מספיק לבדוק בעזרת מכפלה סקלרית אם ווקטור הנורמל של המישור מאונך לווקטור הכיוון של הישר – אלא בנוסף, יש לבדוק שנקודה הנמצאת על הישר אינה נמצאת במישור. (ייתכן שהישר מוכל מישור).

41. את ווקטור הכיוון של ישר החיתוך בין שני מישורים ניתן לבדוק בעזרת המכפלה הווקטורית, לפיכך מומלץ לבדוק את ווקטור הכיוון לפני "שממשיכים הלאה" בפתרון.

42. כאשר מחפשים שתי נקודות שיהיו על ישר החיתוך בין שני מישורים, יש להקפיד לרשום נכון את סדר הקואורדינאטות של שתי הנקודות.

43. כשמדובר על זווית בין ישרים יש להשתמש בערך מוחלט. לעומת זאת, כשמדובר על זווית בין ווקטורים אין להשתמש בערך מוחלט.

44. משפט: "ישר ניצב למישור אם ורק אם הוא ניצב לשני ישרים לא מקבילים במישור".

45. זכרו! כאשר ווקטור גיאומטרי ניצב למישור הוא ניצב לכל הווקטורים הנמצאים במישור ולכן המכפלה הסקלרית שלו עם כל אחד מהווקטורים אשר במישור היא אפס.

לכן, כאשר אתם מתבקשים להוכיח שווקטור גיאומטרי ניצב למישור יש להוכיח כי המכפלה הסקלרית שלו עם שני ווקטורים שונים במישור, היא אפס.

ניסוח התשובה יהיה: "הוכחתי שהווקטור מאונך לשני ווקטורים שונים (לא מקבילים) במישור ולכן הוא ניצב לכל המישור".

46. זווית בין מישורים היא הזווית בין ווקטורי הנורמל של המישורים.

אם מבקשים בשאלה בווקטורים גיאומטריים למצוא את הזווית בין שני מישורים, ולא ניתן להכניס את הגוף למערכת צירים, ניתן לעשות זאת על-ידי מציאת הזווית בין הווקטורים הנורמליים של המישורים.

47. לפעמים מומלץ להכניס את הצורה הנתונה למערכת צירים (ימנית):

מיקום ראשית הצירים צריך להיות במקום הנוח ביותר לפתרון התרגיל, אלא אם נאמר בשאלה במפורש איפה למקם את הראשית.

48. ניתן למצוא מרחק בין נקודה לישר במרחב:

א. בעזרת נקודה אופיינית יחד עם מכפלה סקלרית.

ב. בעזרת מכפלה ווקטורית.

ג. בעזרת חשבון דיפרנציאלי.

(כאשר בבעיה יש פרמטרים מומלץ השימוש במכפלה ווקטורית).

49. בשאלות בווקטורים עם פרמטרים, יש לדעת לחקור פונקציה ממעלה ראשונה.

הצורה הנורמלית של משוואה ממעלה ראשונה, עם נעלם אחד, היא $ax = b$.

למשוואה זו יש פתרון יחיד כאשר $a \neq 0$.

למשוואה זו אין פתרון כאשר $a = 0$ וגם $b \neq 0$.

למשוואה זו יש אינסוף פתרונות כאשר $a = 0$ וגם $b = 0$.

50. כאשר רוצים למצוא ווקטור $\underline{w}$ הניצב לווקטור $\underline{u}$ והנמצא במישור הנפרש על ידי שני הווקטורים $\underline{u}$ ו - $\underline{v}$ אחת האפשרויות לכך היא בעזרת <u>שתי</u> מכפלות ווקטוריות.

מכפלה ווקטורית ראשונה תהיה: $\underline{u} \times \underline{v}$. נקבל ווקטור מאונך למישור, נקרא לו ווקטור $\underline{a}$. מכפלה ווקטורית שנייה, בעזרתה נמצא את ווקטור $\underline{w}$ תהיה: $\underline{w} = \underline{a} \times \underline{u}$.

51. כאשר מספר המשוואות קטן ממספר הנעלמים יש להניח את ההנחה לגבי אחד הנעלמים רק <u>בסוף</u> תהליך ההצבות. למשל במציאת ווקטור הנורמל של מישור באמצעות המכפלה הסקלרית.

52. הרעיון מאחורי הנושא: **"קומבינציה - תלות ווקטורים ויחידות ההצגה":**

מבטאים את אותו הווקטור בשני אופנים שונים בעזרת ווקטורי הבסיס $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$

וכן בעזרת הפרמטרים s ו- t ומשווים את המקדמים של הווקטורים.

כך ניתן למצוא את s ו- t ואת יחס החלוקה בין ישרים.

53. כאשר משווים את המקדמים של שני ווקטורים, על-מנת למצוא את t ו- s , יש לרשום:

"בהסתמך על יחידות ההצגה, נקבל על-ידי השוואת המקדמים של הווקטורים $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$

את המשוואות הבאות".

54. אם שני ישרים נפגשים, אז נקודת המפגש נמצאת על שני הישרים ולכן יש שני פרמטרים

t ו- s , המקיימים את יחס החלוקה, ויש פתרון למערכת המשוואות.

נקודת המפגש בין שני הישרים "סוגרת מעגל".

55. בשאלות בקומבינציה יש להיעזר:

א. במשפט לגבי ווקטורים שמוצאם בנקודה וסופם על ישר (ראה סעיף 14).

ב. במשפט לגבי ווקטורים שמוצאם בנקודה אחת וסופיהם על מישור (ראה סעיף 18).

ג. ווקטור הנמצא במישור והוא קומבינציה של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
(ראה סעיף 36).

ד. "סגירת מעגל", תמיד מתקיים $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \underline{0}$.

ה. שימוש בנוסחא לשטח משולש, כאשר מבקשים יחס שטחים בין שני משולשים

נוסחא כללית לשטח משולש $S = \frac{ab\sin\gamma}{2}$.

ו. מעבר מהפרמטר t ליחס חלוקת הקטע λ: $\lambda = \frac{t}{1-t}$.

הוראות שימוש במכפלה ווקטורית ומכפלה משולשת חולקו בנפרד, יש לעיין בהן ולזכור אותן. חובה להשתמש בניסוחים שניתנו בהוראות אלו.

מאוד חשוב להסביר מהי המכפלה הווקטורית והמכפלה המשולשת ולבצע את הדטרמיננטה בצורה נכונה, במיוחד כאשר שהנושא לא בחומר הלימוד.

ולסיום:-

זכרו כי המסמך בא לתת לכם רק הנחיות כלליות ותזכורת לחומר הלימוד ואינו פוטר אתכם מחזרה ותרגול של כל החומר!

בהצלחה בבחינה!!!