# <u>ווקטורים - שימושים וניסוחים במכפלה הווקטורית ובמכפלה המשולשת.</u>

## <u>כללי</u>

**בכל תרגיל בו אתם בוחרים להשתמש במכפלה הווקטורית ו/או במכפלה המשולשת, יש להסביר מה תפקיד המכפלות באופן כללי, ולהוסיף משפט ספציפי לשימוש בסעיף הרלוונטי.**

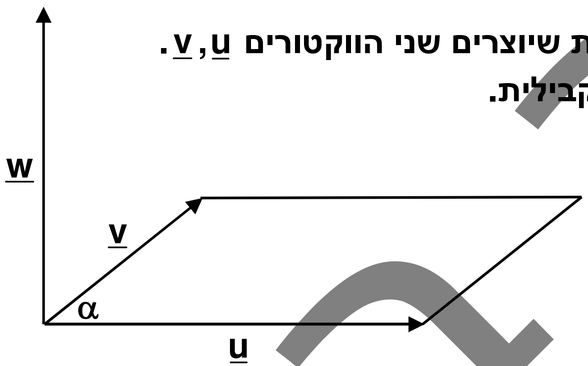
## <u>המכפלה הווקטורית:</u>

**<u>מכפלה ווקטורית מאפשרת למצוא ווקטור מאונך לשני ווקטורים הפורשים את המישור.</u>**

**התוצאה של המכפלה הווקטורית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא ווקטור - $\underline{w}$.**
**הווקטורים $\underline{i}\,,\underline{j}\,,\underline{k}$ הם ווקטורי היחידה בכיוון של הצירים $x\,,y\,,z$ בהתאמה.**
**חישוב הדטרמיננטה:**

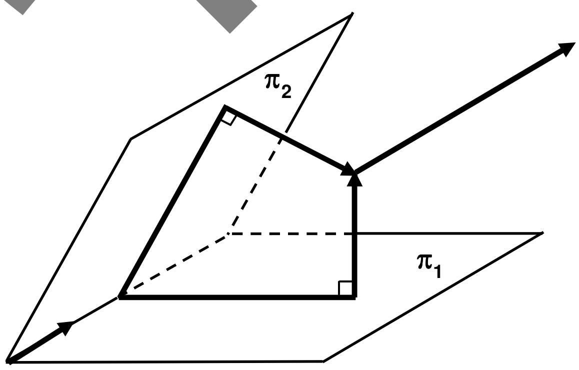
$$\underline{w}=\underline{u}\times\underline{v}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\left(u_2v_3-u_3v_2\right)\underline{i}-\left(u_1v_3-u_3v_1\right)\underline{j}+\left(u_1v_2-u_2v_1\right)\underline{k}$$

**גודל הווקטור $\underline{w}$ מוגדר: $|\underline{w}|=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\sin\alpha$ ,**
**לפיכך יוצא שאורך הווקטור $\underline{w}$ הוא שטח המקבילית שיוצרים שני הווקטורים $\underline{u},\underline{v}$.**
**<u>שימו לב</u>! יוצא שאורך הווקטור $\underline{w}$ שווה לשטח המקבילית.**
**(אורך שווה לשטח ביחידות המתאימות).**




**<u>לכן ניתן להשתמש במכפלה ווקטורית על-מנת למצוא:</u>**

1. **ווקטור המאונך למישור הנפרש על ידי הווקטורים $\underline{u},\underline{v}$ - הווקטור $\underline{w}$.**
2. **שטח מקבילית, הוא אורך הווקטור $\underline{w}$ - $|\underline{w}|$.**
3. **שטח משולש, מחצית שטח המקבילית - $\frac{1}{2}|\underline{w}|$.**
4. **ווקטור הכיוון של ישר החיתוך בין שני מישורים נחתכים.**




**מכפלה ווקטורית בין שני הוקטורים הנורמלים של המישורים $\pi_1$ ו- $\pi_2$ תיתן ווקטור בכיוון של ישר החיתוך שבין שני המישורים הנ"ל.**

**<u>דוגמא למציאת ווקטור הכיוון של ישר החיתוך שבין שני מישורים:</u>**

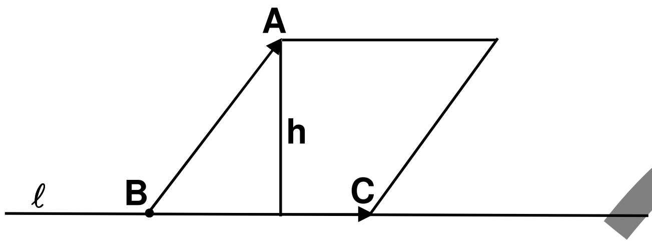
**נתונים שני מישורים נחתכים מצא את ווקטור הכיוון של ישר החיתוך.**

$$\pi_1 : 3x + y - 2z - 10 = 0$$
$$\pi_2 : x + 2y - 4z - 10 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \underline{i}(-4+4) - \underline{j}(-12+2) + \underline{k}(6-1) \Rightarrow (0\,,10\,,5) \Rightarrow (0\,,2\,,1)$$

**ווקטור הכיוון של ישר החיתוך הוא $(0\,,10\,,5)$. במקרה זה ניתן לצמצם את התוצאה $(0\,,2\,,1)$.**
**על מנת למצוא את ישר החיתוך עצמו, יש למצוא נקודה שנמצאת על שני המישורים הנתונים.**

**5. מרחק בין נקודה לישר.**




**h – מרחק הנקודה A מהישר $\ell$.**
**$\overrightarrow{BC}$ - ווקטור הכיוון של הישר הנתון $\ell$.**
**$\overrightarrow{BA}$ - ווקטור מנקודה כלשהי שעל הישר $\ell$ לנקודה הנתונה A.**

**שטח המקבילית שווה לצלע כפול הגובה שלה, את השטח נמצא באמצעות המכפלה הווקטורית.**
**המכפלה הווקטורית תבוצע בין ווקטור הכיוון של הישר הנתון, לבין ווקטור היוצא מנקודה כלשהי על הישר והנקודה הנתונה הנמצאת מחוץ לישר.**
**צלע המקבילית היא אורך ווקטור הכיוון של הישר הנתון, והגובה המקבילית הוא המרחק שאותו צריך למצוא.**
**<u>דוגמא</u>: חשב את המרחק של הנקודה $A(11\,,-1\,,5)$ מהישר $\ell$.**

**$\ell : \underline{x} = (1\,,-3\,,-9) + t(3\,,4\,,1)$.**

**נבחר את הנקודה שנמצאת על הישר $\ell$ כאשר $t = 0$ נקבל $(1\,,-3\,,-9)$.**

**שני הווקטורים היוצרים את המקבילית הם ווקטור הכיוון $(3\,,4\,,1)$, ו- $\overrightarrow{BA} = (10\,,2\,,14)$.**

**מציאת שטח המקבילית בעזרת מכפלה ווקטורית:**

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i}(2-56) - \underline{j}(10-42) + \underline{k}(40-6) = (-54\,,32\,,34)$$

**מציאת אורך הווקטור שהתקבל – הוא שטח המקבילית.**
**הערה: אסור לצמצם את הווקטור שהתקבל.**

$$\left|\,(-54\,,32\,,34)\,\right| = \sqrt{(-54)^2 + 32^2 + 34^2} = \sqrt{5096}$$

**אורך ווקטור הכיוון של הישר הנתון (צלע המקבילית):**

$$\left|(3, 4, 1)\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

**מציאת גובה המקבילית – המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון.**

$$h = \frac{\sqrt{5096}}{\sqrt{26}} = 14$$

**<u>ניסוחים נלווים לפתרון:</u>**

1. **"מכפלה ווקטורית מאפשרת למצוא ווקטור המאונך לשני ווקטורים הפורשים את המישור. לכן נעשה בסעיף זה שימוש במכפלה ווקטורית למציאת ווקטור המאונך למישור."**

2. **"מכפלה ווקטורית מאפשרת למצוא ווקטור המאונך לשני ווקטורים הפורשים את המישור. אורכו של הווקטור המאונך למישור זה הוא שטח המקבילית, הנוצרת משני הווקטורים, ולכן נעשה בסעיף זה שימוש למציאת שטח של המקבילית".**

3. **"מכפלה ווקטורית מאפשרת למצוא ווקטור המאונך לשני ווקטורים הפורשים את המישור. אורכו של הווקטור המאונך למישור הוא שטח המקבילית, הנוצרת משני הווקטורים. שטח משולש הוא מחצית שטח מקבילית ולכן נעשה בסעיף זה שימוש למציאת שטח של המשולש".**

**<u>הערה:</u>**
**יש להקפיד על ביצוע נכון של הדטרמיננטה, בנוסף יש לבדוק אם התוצאה שהתקבלה מהדטרמיננטה נכונה, וזאת לפני שממשיכים הלאה בפתרון. למשל – האם הווקטור $\underline{w}$ שהתקבל אכן מאונך לשני הווקטורים $\underline{u}, \underline{v}$ ניתן לבדוק זאת בעזרת המכפלה הסקלרית, האם אכן $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$ , $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$.**

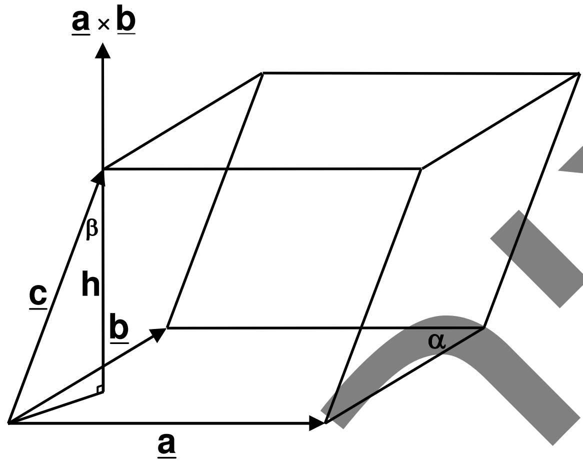
## <u>המכפלה המשולשת</u>.

**המכפלה משלבת מכפלה סקלרית עם מכפלה ווקטורית. (נקראת גם מכפלה מעורבת).**

**התוצאה של מכפלה משולשת היא <u>סקלר</u>.**
**המכפלה המשולשת היא הדטרמיננטה של שלושת הווקטורים.**

$$\underline{w}\cdot(\underline{u}\ x\ \underline{v})=\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

**מכפלה משולשת של שלושה ווקטורים, בלתי תלויים במרחב, מאפשרת למצוא את נפח המקבילון הנוצר משלושה ווקטורים אלו.**




**נפח המקבילון V שווה לשטח הבסיס כפול גובה המקבילון h.**
**הבסיס של המקבילון הוא מקבילית הבנוי על הווקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ ולכן שטח הבסיס שווה לאורך המכפלה הווקטורית $\underline{a}x\underline{b}$ כלומר $S=|\underline{a}x\underline{b}|$.**
**הגובה h מאונך לבסיס המקבילון ולכן $h=|\underline{c}|\cdot\cos\beta$, מכאן שנפח המקבילון הוא $|\underline{c}\cdot(\underline{a}x\underline{b})|$.**

$$V=s_{\text{בסיס}}\cdot h=|\underline{a}||\underline{b}|\sin\alpha\cdot h=|\underline{a}x\underline{b}|\cdot h=|\underline{a}x\underline{b}|\cdot|\underline{c}|\cdot|\cos\beta|=|\underline{c}\cdot(\underline{a}x\underline{b})|$$

**<u>הערה</u>: במידה ונפח המקבילון שווה לאפס שלושת הווקטורים $\underline{a}$ , $\underline{b}$ , $\underline{c}$ יימצאו במישור אחד, יוצא אז ששלושת הווקטורים לא מייצרים נפח, עובדה זו תנוצל בחלק מהשימושים במכפלה המשולשת.**

**<u>ניתן להשתמש במכפלה משולשת על-מנת למצוא</u>:**

1. **מציאת נפח מקבילון או תיבה.**
2. **משוואת מישור באמצעות שלוש נקודות.**
3. **מעבר מהצגה פרמטרית של המישור למשוואה אלגברית של המישור.**
4. **מציאת נפח טטראדר - יש לחלק את נפח המקבילון בשש.**
   **<u>ההסבר</u>, בסיס הטטראדר הוא משולש ולכן שטחו הוא מחצית משטח המקבילית, בנוסף לטטראדר יש "שפיץ" לכן יש לחלק בשלוש, כך יוצא שנפח הטטראדר הוא שישית מנפח המקבילון.**
5. **מציאת נפח פירמידה שבסיסה מקבילית ,מלבן, ריבוע, מעוין (יש לחלק את נפח המקבילון בשלוש). במידה ובסיס הפירמידה הוא, למשל, דלתון יש לחלק את הצורה לשני טטראדרים בעלי נפח שווה.**

6. מציאת נפח מנסרה משולשת (יש לחלק את נפח המקבילון בשניים).
7. מציאת מרחק בין שני ישרים מצטלבים.
8. מציאת מצב הדדי של שני ישרים – אם המכפלה המשולשת שונה מאפס הישרים מצטלבים.

**<u>ניסוח אופייני לסעיפים 2 ו-3</u>**

**"מכפלה משולשת של שלושה ווקטורים, בלתי תלויים במרחב, מאפשרת למצוא את נפח המקבילון הנוצר משלושה ווקטורים אלו. לכן, כאשר שלושת הווקטורים נמצאים במישור אחד, נפח המקבילון שהם יוצרים הוא אפס.**
**לכן נעשה בסעיף זה שימוש במכפלה משולשת למציאת משוואת המישור."**

**<u>ניסוח אופייני למציאת נפחים:</u>**

**"מכפלה משולשת של שלושה ווקטורים, בלתי תלויים במרחב, מאפשרת למצוא את נפח המקבילון הנוצר משלושה ווקטורים אלו.**
**נפח המקבילון גדול פי שש מנפח טטראדר המוגדר על-ידי אותם שלושת הווקטורים.**
**לכן נעשה בסעיף זה שימוש במכפלה משולשת למציאת נפח הטטראדר."**

**הערה: יש להתאים ניסוח זה למציאת הנפחים האחרים.**

**<u>חישוב הדטרמיננטה:</u>**

**ניתן לחשב את הדטרמיננטה בצורה נוספת – בעזרת מכפלת האלכסונים:**
**(סכום מכפלות האלכסונים בכיוון אחד פחות סכום המכפלות בכיוון השני).**

$$\underline{w}\cdot(\underline{u}\times\underline{v})=\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc} w_1 & w_2 & w_3 & w_1 & w_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array}\right|=$$

$$=\left(w_1u_2v_3+w_2u_3v_1+w_3u_1v_2\right)-\left(w_3u_2v_1+w_1u_3v_2+w_2u_1v_3\right)$$

**לדטרמיננטה המקורית, שהיא בעלת שלוש עמודות, מוסיפים בעמודות ארבע וחמש את שתי העמודות הראשוניות של הדטרמיננטה המקורית, ומבצעים את מכפלות האלכסונים.**

**דוגמא מספרית של חישוב דטרמיננטה בשתי הדרכים שהוצגו:**

**דרך א' – בעזרת פיתוח השורה הראשונה:**

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 8 & 0.5 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \end{vmatrix}=2\left(0.5\cdot5-3\cdot(-9)\right)-(-4)\left(8\cdot5-3\cdot6\right)+7\left(8\cdot(-9)-(0.5)\cdot6\right)=$$

$$=2\cdot29.5+4\cdot22+7\cdot(-75)=-378$$

**דרך ב' – בעזרת סכום והפרש "הכפלת האלכסונים".**
**לדטרמיננטה המקורית, שהיא בעלת שלוש עמודות, מוסיפים בעמודות ארבע וחמש את שתי העמודות הראשוניות של הדטרמיננטה המקורית.**

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 8 & 0.5 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 & 2 & -4 \\ 8 & 0.5 & 3 & 8 & 0.5 \\ 6 & -9 & 5 & 6 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[2\cdot(0.5)\cdot 5 + (-4)\cdot 3\cdot 6 + 7\cdot 8\cdot(-9)\right] - \left[7\cdot(0.5)\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot(-9) + (-4)\cdot 8\cdot 5\right] =$$

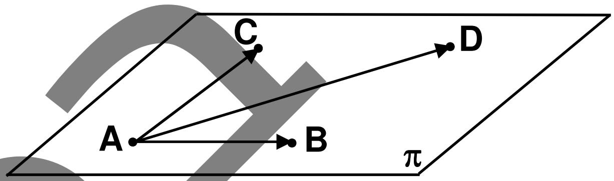
$$= (-571) - (-193) = -378$$

**<u>הערה</u>: זו לא דטרמיננטה של שלוש שורות על חמש עמודות.**

## <u>דוגמאות מעשיות בשימוש במכפלה ווקטורית ומשולשת</u>

**דוגמא א' – <u>מציאת משוואת מישור העובר דרך שלוש נקודות. (שלא נמצאות על ישר אחד).</u>**

**נתונות שלוש נקודות** $A(-4\,,-3\,,0)\quad,\quad B(0\,,-2\,,3)\quad,\quad C(6\,,-4\,,5)$
**מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות.**
**נסמן את הנקודה** $D(x\,,y\,,z)$**. שתייצג את כל הנקודות במישור.**
**שלושת הווקטורים** $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD}$ **נמצאים במישור אחד ולכן המכפלה המשולשת שלהם שווה לאפס.**




$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+4 & y+3 & z \\ 4 & 1 & 3 \\ 10 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+4)(5+3) - (y+3)(20-30) + z(-4-10) = 0$$

$$8x + 32 + 10y + 30 - 14z = 0 \quad \Rightarrow 8x + 10y - 14z + 62 = 0 \quad \Rightarrow 4x + 5y - 7z + 31 = 0$$

**<u>הערה</u>: יש לבדוק, לפני שממשיכים הלאה בפתרון, שהמישור שהתקבל אכן עובר דרך שלוש הנקודות הנתונות. (הבדיקה עם המחשבון היא קצרה ומהירה, לכן טעות במשוואת המישור ללא הבדיקה, לא תחשב כטעות נגררת – ניתן מראש למנוע אותה ולתקן בהתאם).**

**דוגמא ב' – <u>מעבר מהצגה פרמטרית של המישור למשוואת המישור.</u>**

**נתון המישור בהצגה פרמטרית:** $\underline{x}=(-4,7,2)+t(1,-5,3)+s(-6,9,-4)$

**שוב, נסמן נקודה כללית $D(x,y,z)$ שתייצג את הנקודות במישור. בעזרת הנקודה D נקבל את הווקטור השלישי על מנת לבצע המכפלה המשולשת.**

$$\begin{vmatrix} x+4 & y-7 & z-2 \\ 1 & -5 & 3 \\ -6 & 9 & -4 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow (x+4)(20-27)-(y-7)(-4+18)+(z-2)(9-30)=0$$

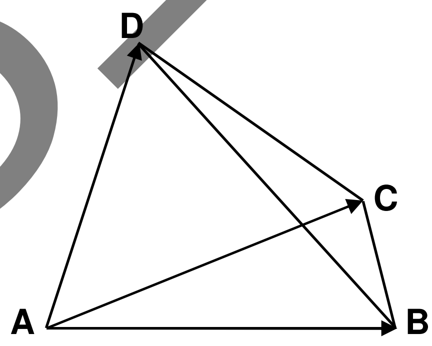
$$-7x-28-14y+98-21z+42=0 \quad ,\Rightarrow 7x+14y+21z-112=0 \quad \Rightarrow x+2y+3z-16=0$$

**<u>הערה</u>: ניתן לבדוק בעזרת מכפלה סקלרית, בין ווקטור הנורמל של מישור שהתקבל, לווקטורים הפורשים את המישור, שאכן הוא מאונך להם, בנוסף שהנקודה $(-4,7,2)$ נמצאת במישור שהתקבל.**

$$(1,2,3)\bullet(1,-5,3)=0$$
$$(1,2,3)\bullet(-6,9,-4)=0$$
$$1\cdot(-4)+2\cdot(7)+3\cdot(2)-16=0$$

**דוגמא ג' – <u>מציאת נפח של טטראדר</u>**

**נפח הטטראדר הוא שישית מנפח המקבילון החוסם את הטטראדר.**
**את נפח המקבילון נמצא באמצעות מכפלה משולשת עם שלושת הווקטורים $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.**



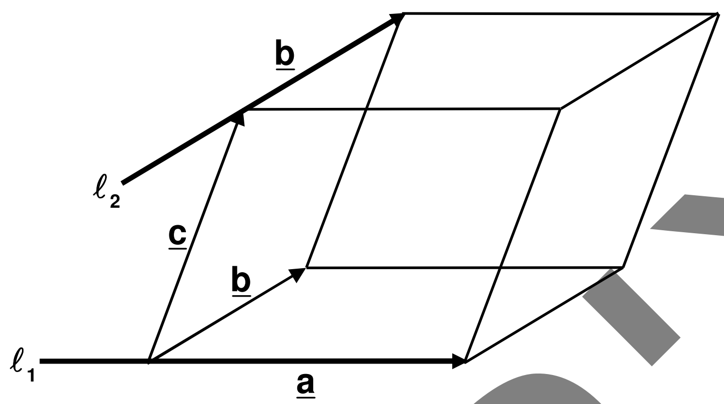

**הדוגמא: נתונות ארבע נקודות (שלא על מישור אחד) מצא את נפח הטטראדר שהן יוצרות.**
$A(0,0,4)$ , $B(2,-2,3)$ , $C(8,-4,4)$ , $D(2,-1,-6.5)$

$$V=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & -10.5 \\ 8 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|2\cdot(4-0)+1(-8-0)-10.5(-16+8)\right|=\frac{1}{6}\left|8-8+84\right|=14$$

**הערה: הערך המוחלט כדי למנוע נפח שלילי.**

**דוגמא ד': <u>מרחק של שני ישרים מצטלבים</u>.**

**$\ell_1$ ו- $\ell_2$ שני הישרים המצטלבים.**
**הווקטור $\underline{a}$ הוא ווקטור הכיוון של הישר $\ell_1$.**
**הווקטור $\underline{b}$ הוא ווקטור הכיוון של הישר $\ell_2$.**
**הווקטור $\underline{c}$ הוא ההפרש בין שתי נקודות שעל שני הישרים.**




**נתונים שני ישרים מצטלבים, יש למצוא את המרחק בניהם.**

$$\ell_1 : \underline{x} = (1\ ,1\ ,1) + t(1,0,-2)$$
$$\ell_2 : \underline{x} = (0\ ,4\ ,5) + s(1,0,2)$$

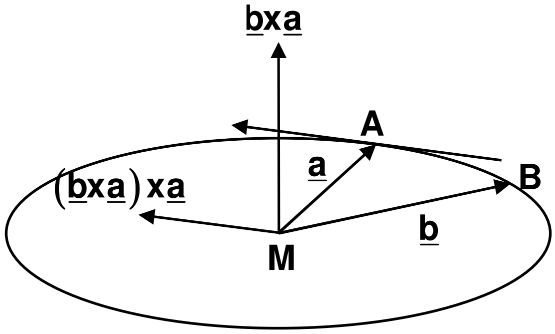
**הווקטור $(-1,3,4)$ הוא ווקטור ההפרש בין שתי הנקודות שנמצאות על שני הישרים הנתונים.**
**המונה מיצג את נפח המקבילון, המכנה מיצג את שטח בסיס המקבילון.**
**המנה תיתן את המרחק בין שני הישרים המצטלבים.**

$$d = \frac{\left|\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right|} = \frac{|-1\cdot 0 - 3\cdot 4 + 4\cdot 0|}{|\underline{i}\cdot 0 - \underline{j}\cdot 4 + \underline{k}\cdot 0|} = \frac{|-12|}{|(-4\underline{j})|} = \frac{12}{4} = 3$$

**הערה: המכנה מכיל שני סימונים, האחד של הדטרמיננטה למציאת ווקטור, והשני סימון של ערך מוחלט של אותו הווקטור. ערך מוחלט של הווקטור הוא אורך הווקטור, ואורך הווקטור הוא שטח המקבילית.**

**דוגמא ה' – <u>מציאת הצגה פרמטרית של ישר המשיק למעגל.</u>**

**הנקודות $A(3,1,4)$ ו- $B(0,3,5)$ נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה $M(1,2,3)$.**
**מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A. (הישר נמצא במישור המעגל).**




**על מנת למצוא את ווקטור הכיוון של המשיק בנקודה A, נבצע שתי מכפלות ווקטוריות.**

$$\underline{b}\mathrm{x}\underline{a}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\underline{i}(1+2)-\underline{j}(-1-4)+\underline{k}(1-2)\Rightarrow(3,5,-1)$$

$$(\underline{b}\mathrm{x}\underline{a})\mathrm{x}\underline{a}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\underline{i}(5-1)-\underline{j}(3+2)+\underline{k}(-3-10)\Rightarrow(4,-5,-13)$$

$$\ell:\underline{x}=(3,1,4)+t(4,-5,-13)$$

**<u>הערות לסיכום הנושא:</u>**

1. **היות והנושאים הנ"ל לא כלולים בחומר הלימוד של 5 יח"ל חובה לתת הסבר מלווה כאשר משתמשים במכפלה הווקטורית ובמכפלה המשולשת.**
2. **יש להקפיד על ביצוע נכון של הדטרמיננטה.**
3. **ניתן לפתור את השאלות בשיטות אחרות שנלמדו בכיתה, למשל, שימוש במכפלה סקלרית, שימוש בטריגונומטריה (משפט הסינוס והקוסינוס) וכו'.**

**להזכירכם, בכל מקרה יש ללוות את הפתרון בהסבר מילולי - גם בנושאים שכן כלולים בחומר הלימוד.**

**<u>הערה אישית</u>**

**אני מקווה שבעתיד, יעשו המורים שימוש רחב יותר במכפלה הווקטורית ובמכפלה המשולשת, וששני הנושאים הנ"ל יוכנסו בצורה רשמית לתוכנית הלימודים של משרד החינוך, לטובת התלמידים הלומדים 5 יח"ל מתמטיקה.**