נסמן ב- x **את מהירות המשאית שיצאה מעיר** A **(קמ"ש, קבועה)**

נסמן ב- y **את מהירות המכונית שיצאה מעיר** B **(קמ"ש, קבועה)**

נסמן ב- s **את המרחק מעיר** A **לעיר** B **(ק"מ)**

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
עד מפגש ראשון	משאית	2	x	$2x$
	מונית	2	y	$2y$
ממפגש ראשון עד מפגש שני	משאית	$2\frac{2}{3}$	x	$2\frac{2}{3}x$
	מונית	$2\frac{2}{3}$	y	$2\frac{2}{3}y$
מיציאה עד מפגש שלישי	משאית	$\frac{s-40}{x}$	x	$s-40$ עד 40 ק"מ מעיר B
	מונית	$\frac{2s+40}{y}$	y	$2s+40$ הלוך ושוב, ועוד 40 ק"מ

עד המפגש הראשון עברו שני כלי הרכב את כל הדרך: $2x+2y=s$.

מהמפגש הראשון עד המפגש השני עברה המכונית

(עד עיר A**) את המרחק שעברה המשאית מתחילת התנועה עד המפגש הראשון,**

וגם את המרחק (מעיר A**) שעברה המשאית מהתחלה עד המפגש השני :** $2\frac{2}{3}y=2x+2\frac{2}{3}x$.

הזמנים שעברו שני כלי הרכב מיציאה עד למפגש שלישי, 40 **ק"מ מעיר** B**, שווים** $\frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{y}$

$$\begin{cases} (1) \quad 2x+2y=s \\ (2) \quad 2\frac{2}{3}y=2x+2\frac{2}{3}x \quad \rightarrow y=2.5x \\ (3) \quad \frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{y} \end{cases}$$

$$(2),(3) \quad \frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{2.5x} \quad /\cdot 2.5x$$

$$2.5s-100=2s+40$$

$$0.5s=140$$

$$\boxed{s=280}$$

$$(1),(2)\ 2x+2\cdot 2.5x=280$$

$$7x=280$$

$$\boxed{x=40} \quad \boxed{y=100}$$

תשובה: מהירות המשאית 40 **קמ"ש.**

נכתב ע"י עפר ילין

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $\frac{1}{6}\cdot 1(1+1)(2\cdot 1+1)=1$ אגף שמאל: $S_1=a_1=1$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $S_1+S_2+S_3+...+S_k=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$,

כאשר : $S_{k+1}=\frac{(k+1)[2\cdot 1+2(k+1-1)]}{2}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.

נתון כי $a_1=1,\ d=2$ ולכן $S_{k+1}=\frac{(k+1)[2\cdot 1+2(k+1-1)]}{2}=(k+1)^2$

צ"ל :

$$\underbrace{S_1+S_2+S_3+...+S_k}_{\downarrow}+S_{k+1}=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$, הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו,
אז היא נכונה עבור $n=k+1$ לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

פרוק הביטוי $2k^2+7k+6$ ע"י משוואה ריבועית:

$$2k^2+7k+6=0$$

$$k_{1,2}=\frac{-7\pm 1}{4}\quad\rightarrow k=-2,-\frac{3}{2}$$

$$2(k+2)(k+\frac{3}{2})$$

$$(k+2)(2k+3)$$

2ב

הסדרה מקיימת לכל n טבעי את כלל הנסיגה: $b_{n+1}=\frac{b_n}{b_n-1}$.

כאשר נתון כי $b_{19}+b_{20}=4.5$.

על פי כלל הנסיגה $b_{20}=\frac{b_{19}}{b_{19}-1}$.

נסמן: $b_{19}=t$

$$t+\frac{t}{t-1}=4.5$$
$$t(t-1)+t=4.5(t-1)$$
$$t^2-t+t=4.5t-4.5$$
$$t^2-4.5t+4.5=0$$
$$t_{1,2}=\frac{4.5\pm1.5}{2}$$
$$t=3 \quad \rightarrow b_{19}=3 \quad \rightarrow b_{20}=1.5$$
$$t=1.5 \quad \rightarrow \cancel{b_{19}=1.5} \quad \leftarrow b_{19}>2$$

קבלנו ש- $b_{20}=1.5$ **ומכיוון ונתון כי** $b_{n+2}=b_n$**, הרי שגם** $b_{10}=1.5$

(למעשה, סדרת האיברים במקומות הזוגיים, או האי זוגיים, בסדרה הנתונה – היא קבועה)

תשובה: $b_{10}=1.5$

א. נגדיר את המאורעות:

S **- הנסקרים** A **- צעירים** $\overline{A}$ **- מבוגרים**

B **- הצהירו שיקנו טלפון חדשני** $\overline{B}$ **- הצהירו שלא יקנו טלפון חדשני**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$P(B/\overline{A}) = 0.5 \quad \rightarrow P(\overline{B}/\overline{A}) = 0.5$$

$$P(A/\overline{B}) = \frac{2}{3} \quad \rightarrow P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap \overline{B}) = 0.2$$

פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{0.2}{P(\overline{B})}$$

$$\boxed{P(\overline{B}) = 0.3}$$

$$P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$0.5 = \frac{0.1}{P(\overline{A})}$$

$$\boxed{P(\overline{A}) = 0.2}$$

<u>נציב בטבלה ונשלים נתונים</u>

	A **צעירים**	$\overline{A}$ **מבוגרים**	
B **- יקנו**	0.6	0.1	0.7
$\overline{B}$ **- לא יקנו**	0.2	0.1	0.3
	0.8	0.2	1

בסקר השתתפו $2,000$ **איש, כלומר** $N(S) = 2,000$

$$N(A) = P(A) \cdot N(S)$$

$$N(A) = 0.8 \cdot 2,000 = 1,600$$

תשובה: $1,600$ **צעירים השתתפו בסקר.**

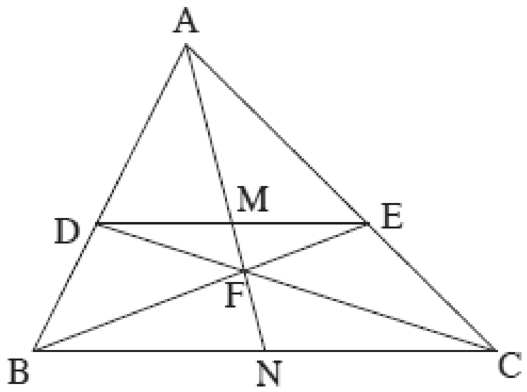
ב. נמצא כמה צעירים, מבין הצעירים שהשתתפו בסקר, הצהירו שיקנו את הטלפון החדשני.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

$$N(B/A) = P(B/A) \cdot N(A) = 0.75 \cdot 1,600 = 1,200$$

תשובה: $1,200$ **צעירים, מבין הצעירים שהשתתפו בסקר, הצהירו שיקנו את הטלפון החדשני.**

עב ינואר 12 מועד חורף שאלון 35806



<u>נתונים</u>

1. $DE \parallel BC$

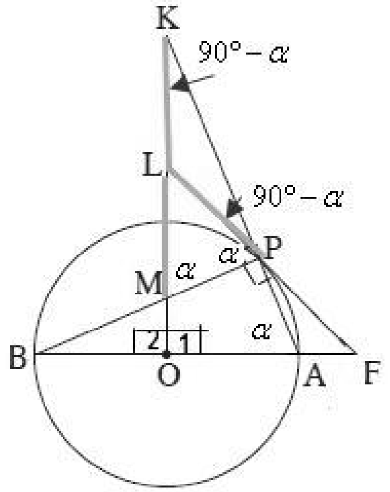
צ"ל: א. $\frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}$

ב. $\frac{EM}{BN} = \frac{DM}{CN}$

ג. $DM = EM$ **,** $BN = CN$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	2	$DE \parallel BC$	נתון
2	3	$\frac{DM}{BN} = \frac{AM}{AN}$	משפט תאלס הרחבה 1
2	4	$\frac{AM}{AN} = \frac{EM}{CN}$	משפט תאלס הרחבה 1
3, 4	5	$\boxed{\frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}}$	כלל המעבר
		מ.ש.ל. א	
2	6	$\frac{EM}{BN} = \frac{MF}{FN}$	משפט תאלס הרחבה 2
2	7	$\frac{MF}{FN} = \frac{DM}{CN}$	משפט תאלס הרחבה 2
6, 7	8	$\boxed{\frac{EM}{BN} = \frac{DM}{CN}}$	כלל המעבר
		מ.ש.ל. ב	
5	9	$\frac{DM}{EM} = \frac{BN}{CN}$	חישוב לפי כללי פרופורציה – יחס המונים הוא כיחס המכנים
8	10	$\frac{DM}{EM} = \frac{CN}{BN}$	חישוב לפי כללי פרופורציה – יחס המונים הוא כיחס המכנים
9, 10	11	$\frac{BN}{CN} = \frac{CN}{BN}$	כלל מעבר
11	12	$\boxed{BN = CN}$	חישוב
10, 12	13	$\boxed{EM = DM}$	הצבה וחישוב
		מ.ש.ל. ג	

5



<u>נתונים</u>

1. AB **קוטר במעגל שמרכזו** O **2.** $O_1 = O_2 = 90°$

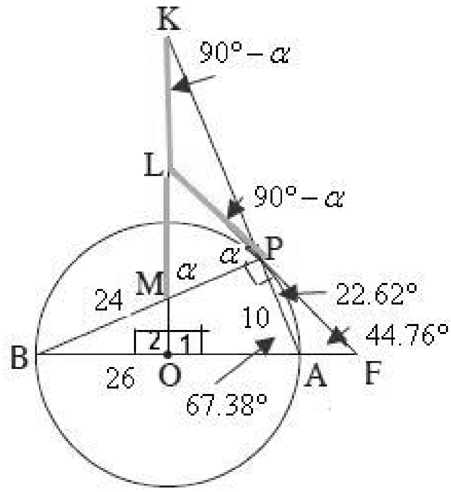
3. LF **משיק למעגל בנקודה** P.

עבור ב: 4. 24 **ס"מ** = BP **5. רדיוס המעגל** 13 **ס"מ**

צ"ל: א. KL = LM **ב.** AF

הסבר	מס'	טענה	נימוק
2	6	$O_1 = O_2 = 90°$	נתון
1	7	AB קוטר במעגל שמרכזו O	נתון
7	8	$\angle APB = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
3	9	LF משיק למעגל בנקודה P	נתון
8	10	$\angle KPM = 90°$	זוויות צמודות משלימות ל $180°$
	11	$\angle PAB = \alpha$	סימון
6, 11	12	$\angle K = 90° - \alpha$	סכום זוויות ΔAKO $180°$
10, 12	13	$\angle KMP = \alpha$	סכום זוויות ΔKPM $180°$
9, 11	14	$\angle LPM = \alpha$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר מצידו השני וכלל המעבר
13, 14	15	$\angle KMP = \angle LPM$	כלל המעבר
15	16	LP = LM	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔLPM
10, 14	17	$\angle KPL = 90° - \alpha$	הפרש זוויות
12, 17	18	$\angle KPL = \angle K$	כלל המעבר
18	19	LP = LK	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔKLP
16, 19	20	KL = LM	כלל המעבר
		מ.ש.ל. א	

ונעבור לטריגונומטריה לסעיף ב



24 ס"מ $= BP$ (נתון)

רדיוס המעגל 13 ס"מ (נתון) ולכן אורך הקוטר 26 ס"מ $= BA$

10 ס"מ $= AP$ (משפט פיתגורס ΔBAP)

מציאת ערך α ב- ΔBAP

$$\tan \alpha = \frac{24}{10}$$

$$\alpha = 67.38^\circ$$

$\angle FPA = 90^\circ - \alpha = 90 - 67.38 = 22.62^\circ$ (זווית שטוחה משלימה ל 180°)

$\angle F = 44.76^\circ$ (α זווית חיצונית למשולש ΔFAP שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה)

משפט סינוסים ΔFPA

$$\frac{AF}{\sin \angle FPA} = \frac{AP}{\sin \angle F}$$

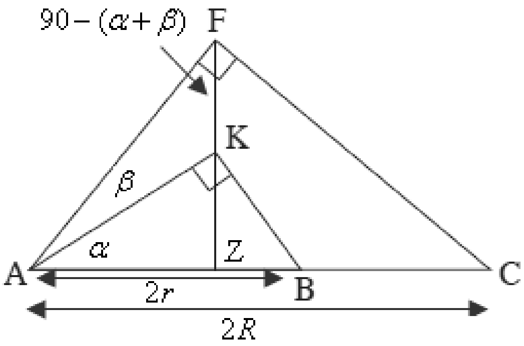
$$\frac{AF}{\sin 22.62^\circ} = \frac{10}{\sin 44.76^\circ}$$

$$\boxed{AF = 5.462}$$

תשובה: 5.462 ס"מ $= AF$

א. (1) שני המשולשים ΔAKB **ו-** ΔAFC **ישרי זווית.,**

לכן $AC = 2R$ **ו-** $AB = 2r$ **(קוטר נשען על זווית היקפית ישרה)**



$\underline{\Delta AKZ}$: $\cos\alpha = \frac{AZ}{AK}$

$\underline{\Delta AFZ}$: $\cos(\alpha+\beta) = \frac{AZ}{AF}$

וע"י חילוק המשוואות נקבל $\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{AF}{AK}$

תשובה: $\frac{AF}{AK} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$

(2) $\underline{\Delta AKB}$: $\cos\alpha = \frac{AK}{2r}$

$\underline{\Delta AFC}$: $\cos(\alpha+\beta) = \frac{AF}{2R}$

וע"י חילוק המשוואות נקבל $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} = \frac{AF}{AK}\cdot\frac{R}{r}$

נציב על פי (1) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}\cdot\frac{R}{r}$ **ונקבל :** $\frac{R}{r} = \frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha}$

תשובה: $\frac{R}{r} = \frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha}$

ב. משפט סינוסים $\underline{\Delta AKF}$ **, כאשר** t **רדיוס המעגל החוסם משולש זה.**

$$\frac{AK}{\sin(90^\circ-(\alpha+\beta))} = 2t$$

$$\frac{2r\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)} = t$$

$$\sqrt{\frac{R}{r}}\cdot r = t$$

$$\boxed{t = \sqrt{R}\sqrt{r}} \quad \leftarrow r>0$$

תשובה: רדיוס המעגל החוסם את ΔAKF **הוא** $\sqrt{R}\sqrt{r}$ **יחידות.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x}-2}$ **.**

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ- 0

$\sqrt{2x}-2\neq 0$ **, לכן** $x\neq 4$ **וגם** $2x\geq 0$ **ובהתאם** $x\geq 0$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה: $x\geq 0,\ x\neq 4$ **.**

(2) נמצא אסימפטוטות המקבילות לצירים:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x}-2}=\frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}} \quad \leftarrow x>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{\sqrt{2x}-2}=+\infty \quad ,\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{\sqrt{2x}-2}=-\infty \quad \to \boxed{x=2}$$

תשובה: אסימפטוטה אנכית: $x=2$ **ואין אסימפטוטה אופקית.**

(3) בנקודת חיתוך עם ציר y **מתקיים, כי** $x=0$ **ונקודת החיתוך היא** $(0,0)$ **.**

זו גם נקודת החיתוך היחידה עם ציר ה- x

תשובה: $(0,0)$ **.**

(4) $(0,0)$ **היא נקודת קצה, ולכן תהיה גם נקודת קיצון.**

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x}-2-\frac{2x}{2\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x}-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x}-2-0.5\sqrt{2x}}{(\sqrt{2x}-2)^2} \quad \leftarrow x>0$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{0.5\sqrt{2x}-2}{(\sqrt{2x}-2)^2}} \quad \leftarrow x>0$$

$$0=0.5\sqrt{2x}-2$$

$$4=\sqrt{2x}$$

$$2x=16$$

$$x=8 \quad \to 4=\sqrt{2\cdot 8} \quad \to 4=4 \quad \to o.k.$$

$$f(8)=\frac{8}{\sqrt{2\cdot 8}-2}=4 \quad \to (8,4)$$

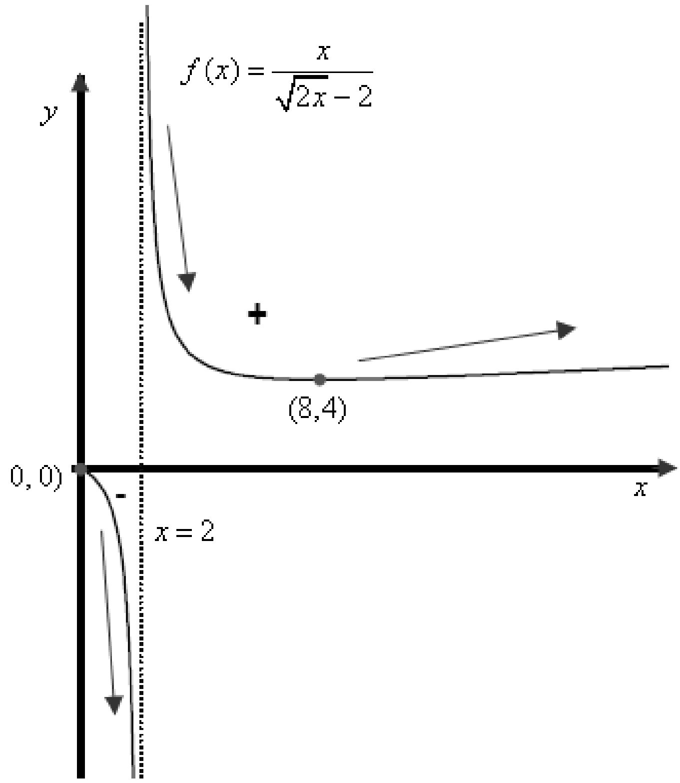
נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1-2}}=-1,\quad f(7)=\frac{7}{\sqrt{2\cdot 7-2}}=4.02,\quad f(1)=\frac{9}{\sqrt{2\cdot 9-2}}=4.01$$

x	0	1	4	7	8	9
$f(x)$	0	-1		0.4	4	4.01
$f'(x)$						
מסקנה	Max	↘		↘	Min	↗

תשובה: $(0,0)$ **מקסימום ,** $(8,4)$ **מינימום.**

(5) הסקיצה המתאימה (כולל סימונים עבור סעיף ב):



ב. נתון כי $g'(x)=f(x)\cdot f'(x)$ **, כאשר** $g(x)$ **מוגדרת בתחום ההגדרה של** $f(x)$ **.**

$g(x)$ **יורדת כאשר** $g'(x)<0$ **, כלומר כאשר** $f(x), f'(x)$ **שוני סימן.**

על פי טבלת עלייה וירידה, וגם הסקיצה של $f(x)$ **, זה מתקיים עבור** $2<x<8$ **,**

כאשר $f(x)$ **חיובית, אולם יורדת (כלומר** $f'(x)<0$ **).**

תשובה: $2<x<8$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}$ **בתחום** $-\frac{p}{6}\le x\le\frac{7p}{6}$ **.**

$16\sin x+9$ **חיובי לכל** x **כי** $-1\le\sin x\le 1$ **ולכן הפונקציה מוגדרת בכל התחום** $-\frac{p}{6}\le x\le\frac{7p}{6}$

מכנה הפונקציה חיובי, לכן סימן הפונקציה נקבע על ידי המונה.

$a>0$ **לכן** $-a<0$ **ומכאן שכאשר** $\cos x>0$ **הפונקציה שלילית, וכאשר** $\cos x<0$ **הפונקציה חיובית.**

(1) $f(x)>0$ **עבור** $\frac{p}{2}<x<\frac{7p}{6}$ **.**

(2) $f(x)<0$ **עבור** $-\frac{p}{6}<x<\frac{p}{2}$ **.**

ב. נחשב את האינטגרל המסוים $\int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}}\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\,dx$

נשים לב כי $(16\sin x+9)'=16\cos x$

$$\int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}}\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\,dx=$$

$$-2a\sqrt{16\sin x+9}\Big]_{-\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}}=$$

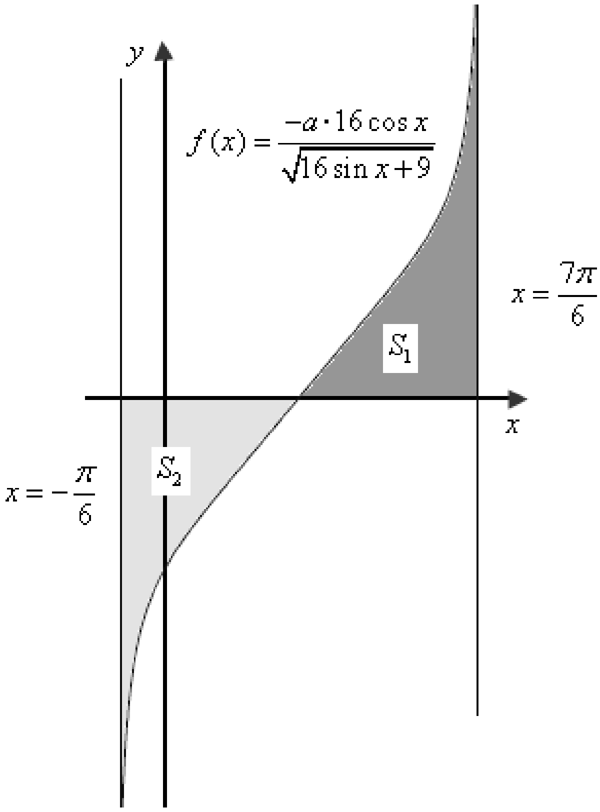
$$-2a\left(\sqrt{16\sin\frac{7p}{6}+9}-\sqrt{16\sin(-\frac{p}{6})+9}\right)=$$

$$-2a(1-1)=0$$

תשובה: ערך האינטגרל המסוים הוא 0 **.**

ג. נצייר את הסקיצה המתאימה של $f(x)$, על פי תחומי החיוביות והשליליות הנתונים,

כולל סימון הישרים: $x=\frac{p}{2}, \quad x=-\frac{p}{6}$ **.**



כיוון שהראינו כי $\int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}} \frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\,dx=0$ **, הרי ש-** $S_1=S_2$ **.**

גודל השטח הכולל הוא 8**, לכן** $S_1=S_2=4$ **.**

$$S_1=\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{7p}{6}} \frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\,dx=$$

$$S_1=-2a\sqrt{16\sin x+9}\Big]_{\frac{p}{2}}^{\frac{7p}{6}}$$

$$S_1=-2a\left(\sqrt{16\sin\frac{7p}{6}+9}-\sqrt{16\sin(\frac{p}{2})+9}\right)$$

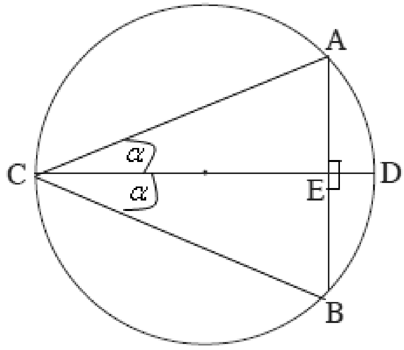
$$S_1=-2a(1-5)$$

$$S_1=8a$$

לכן, $8a=4$ **ו-** $a=0.5$ **.**

תשובה: $a=0.5$

9



הפונקציה שיש להביא ל*מקסימום* **היא** *שטח המשולש* ABC .

CD **הוא קוטר, שאורכו נתון** $2R$ **, המאונך למיתר** AB **, ולכן חוצה את הקשת** $\overset{\frown}{AB}$ **.**

(אם ישר עובר דרך מרכז המעגל ומאונך למיתר אז הוא חוצה את הקשת שהמיתר נשען עליה)

נסמן את $S\text{ACD}$ **ב-** a **ולכן** $S\text{BCD}=a$ **(על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות).**

ב: ΔACD **נקבל :** $\text{AC}=2R\cos a$

ולכן: $S(a)=\dfrac{(2R\cos a)^2\sin 2a}{2} \leftarrow \boxed{S(a)=2R^2\cos^2 a\sin 2a}$

$$S'(a)=2R^2(2\cos a(-\sin a)\sin 2a+2\cos^2 a\cos 2a)$$
$$S'(a)=2R^2(2\cos a\left[-\sin a\sin 2a+\cos a\cos 2a\right])$$
$$\boxed{S'(a)=4R^2\cos a\cos 3a}$$
$$\cancel{0=\cos a} \quad \leftarrow 0<a<90^\circ$$
$$0=\cos 3a$$
$$3a=90^\circ+180^\circ k$$
$$a=30^\circ+60^\circ k$$
$$a=30^\circ \quad \leftarrow 0<a<90^\circ$$
$$\left.\begin{array}{l} S'(\frac{p}{7})=4R^2\cos\frac{p}{7}\cos 3\cdot\frac{p}{7}=0.8R^2>0 \\ S'(\frac{p}{5})=4R^2\cos\frac{p}{5}\cos 3\cdot\frac{p}{5}=-R^2<0 \end{array}\right\}\max$$

קבלנו ש ΔABC **הוא בעל שטח מקסימלי כאשר הוא שווה צלעות.**

$$S=2R^2\cos^2 30^\circ\sin 60$$
$$S=2R^2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\boxed{S=\frac{3\sqrt{3}}{4}R}$$

תשובה: השטח המקסימלי של ΔABC **הוא** $\frac{3\sqrt{3}}{4}R$ **יח"ר.**