א. נסמן ב- x את מהירות לרוכב האופניים שיצא מ- A (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- y את מהירות לרוכב האופניים שיצא מ- B (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- s את המרחק בין A עד B (ק"מ)

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
מ- A עד מפגש	4	x	$4x$
מ- B עד מפגש	4	y	$4y$
מ- A עד B	$\frac{s}{x}$	x	s
מ- B עד A	$\frac{s}{y}$	y	s

הרוכבים נפגשו לאחר 4 שעות, והמשוואה המתאימה היא $4x+4y=s$

הזמן שנדרש לרוכב מ- A לעבור את כל הדרך

גדול ב- 108 דקות מהזמן שנדרש לרוכב שיצא מ- B והמשוואה המתאימה היא $\frac{s}{x}=\frac{s}{y}+1.8$.

אנו מעוניינים לחשב את היחס $\frac{y}{x}$ **ולכן נציב את** $s=4x+4y$ **במשוואה השנייה.**

נפתור את המשוואה:

$$\frac{4x+4y}{x}=\frac{4x+4y}{y}+1.8$$

$$4+4\cdot\frac{y}{x}=4\cdot\frac{x}{y}+4+1.8 \quad \rightarrow \boxed{\frac{y}{x}=t}$$

$$4t=\frac{4}{t}+1.8 \quad \rightarrow 4t^2-1.8t-4=0$$

$$t_{1,2}=\frac{1.8\pm 8.2}{8}$$

$$\cancel{t_1=-0.8 \quad 0} \quad \leftarrow \frac{y}{x}>0 \quad t_2=1.25 \quad \rightarrow \frac{y}{x}=1.25 \quad o.k.$$

תשובה: היחס הוא 1.25**.**

ב. זמן הרכיבה של הרוכב שיצא מ- A הוא $\frac{s}{x}$ ושל הרוכב $\frac{s}{y}$ שיצא מ- B.

בהתאם נציב $y=1.25x$ במשוואה השנייה:

$$\frac{s}{x}=\frac{s}{1.25x}+1.8 \quad \rightarrow 0.2\cdot\frac{s}{x}=1.8 \quad \rightarrow \frac{s}{x}=9$$

$$\frac{s}{y}=9-1.8 \quad \rightarrow \frac{s}{y}=7.2$$

תשובה: הרוכב שיצא מ- A עבר את הדרך ב- 9 שעות והרוכב שיצא מ- B עבר את הדרך ב- 7.2 שעות.

<u>פתרון בדרך דומה לבעיית הספק (ניתן כך להתחיל את הפתרון המלא)</u>

כאשר x הזמן הלוקח לרוכב ב' לעבור את כל הדרך.

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{x+1.8}=1$$

$$4(x+1.8)+4x=x(x+1.8)$$

$$x^2-6.2x-7.2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{6.2\pm 8.2}{2} \quad \rightarrow x=7.2, \quad x+1.8=9$$

א. יש להוכיח כי לכל n טבעי אי- זוגי, הביטוי n^3-25n מתחלק ב- 24 בלי שארית,

ובמילים אחרות כי הביטוי $\frac{n^3-25n}{24}$ **שלם**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$ $\frac{1^3-25\cdot1}{24}=\frac{-24}{24}=-1$ **לכן הטענה נכונה עבור** $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי אי-זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{k^3-25k}{24}$ **שלם**

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$**, לכן צ"ל** $\frac{(k+2)^3-25(k+2)}{24}$ **שלם**

$$\Leftrightarrow \frac{k^3+6k^2+12k+8-25k-50}{24}= \quad \leftarrow (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^3-25k}{24}+\frac{6k^2+12k-42}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^3-25k}{24}+\frac{\not{6}(k^2+2k-7)}{\not{24}\,4}$$

המחובר השמאלי שלם , על-פי הנחת האינדוקציה,

נראה כי $\frac{k^2+2k-7}{4}$ **שלם לכל** k **טבעי אי-זוגי.**

א) נבדוק את נכונות הטענה עבור $k=1$ **:** $\frac{1^2+2\cdot1-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1 \quad \to o.k.$

ב) נניח שהטענה נכונה עבור טבעי אי-זוגי כלשהו, כלומר $\frac{t^2+2t-7}{4}$ **שלם**

ג) צ"ל כי $\frac{(t+2)^2+2(t+2)-7}{4}$ **שלם עבור** $k=t+2$,

$$\frac{t^2+4t+4+2t+4-7}{4} \Leftrightarrow \text{שלם}, \quad \Leftrightarrow \frac{t^2+2t-7}{4}+\frac{-\not{4}(t-2)}{\not{4}}$$

המחובר השמאלי שלם ע"פ הנחת האינדוקציה השנייה, והמחובר הימני שלם כי $t-2$ **שלם**

ד) לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל k **טבעי אי-זוגי, כלומר** $\frac{k^2+2k-7}{4}$ **שלם**

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי אי-זוגי,**

אז היא נכונה עבור $n=k+2$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי אי-זוגי.**

ובהתאם - $\frac{n^3-25n}{24}$ **שלם.**

ב. נתון כי הביטוי $a+b+c+d$ מתחלק ב- 24 בלי שארית.

a, b, c ו- d הם ספרים טבעיים אי-זוגיים.

נוכיח כי גם הביטוי $a^3+b^3+c^3+d^3$ מתחלק ב- 24 בלי שארית.

על פי הטענה שהוכחה בסעיף א, ארבעת המחוברים הבאים שלמים

$\frac{d^3-d}{24}+\frac{c^3-c}{24}+\frac{b^3-b}{24}+\frac{a^3-a}{24}$ כי a, b, c ו- d הם ספרים טבעיים אי-זוגיים.

לכן $\frac{a^3-a+b^3-b+c^3-c+d^3-d}{24}$ שלם

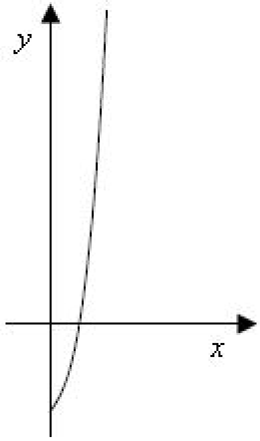
ובהתאם $\frac{a+b+c+d}{24}-\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{24}$ שלם.

כיוון שנתון כי המחובר הימני שלם, הרי שגם המחובר השמאלי שלם.

כלומר $a^3+b^3+c^3+d^3$ מתחלק ב- 24 בלי שארית.

הוכַח

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2x^4+4x^3+2x^2-8}{x+2}$ $\quad (x\neq -2)$



חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה,

לכן ניתן לחלק את הפולינומים לפני השרטוט וביצוע האינטגרל.

$$\begin{array}{l} 2x^3+2x-4 \\ \hline 2x^4+4x^3+2x^2-8 \;|\; x+2 \\ \underline{2x^4+4x^3} \\ = \quad = \quad 2x^2-8 \\ \qquad\quad \underline{2x^2+4x} \\ \qquad = \; -4x-8 \\ \qquad\quad \underline{-4x-8} \\ \qquad\quad = \;\; = \end{array}$$

$-2)$

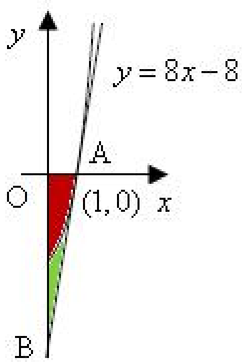
$$f(x)=\frac{(x+2)(2x^3+2(x-2))}{x+2}$$

$$f(x)=(2x^3+2x-4),\; x\neq -2$$

לכן ניתן לרשום את הפונקציה בתחום מפוצל

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3+2x-4 & x\neq 2 \\ \varnothing & x=2 \end{cases}$$

נמצא את משוואת המשיק



נקודת ההשקה $f(1)=2\cdot 1^3=2\cdot 1-4=0=(1,0)$

שיפוע $f'(x)=6x^2+2 \;\rightarrow\; f'(1)=6\cdot 1^2+2=8$

משוואת המשיק: $\boxed{y=8x-8}$ $\leftarrow$ $y-0=8(x-1)$

תשובה: $y=8x-8$

משולש ישר זווית $S_{\Delta AOB}=\dfrac{AO\cdot BO}{2}=\dfrac{1\cdot 8}{2}=4 \;\leftarrow\; B(0,-8)$

$$S_{RED}=\int_0^1 (0-(2x^3+2x-4))\,dx=\left(\frac{-2x^4}{4}-\frac{2x^2}{2}+4x\right)\Bigg]_0^1$$

$$=\left(\frac{-2\cdot 1^3}{4}-1^2+4\cdot 1\right)-\left(\frac{-2\cdot 0^3}{4}-0^2+4\cdot 0\right)=2.5$$

ובהתאם: $S_{GREEN}=4-2.5=1.5$

תשובה: 1.5 **יח"ר**

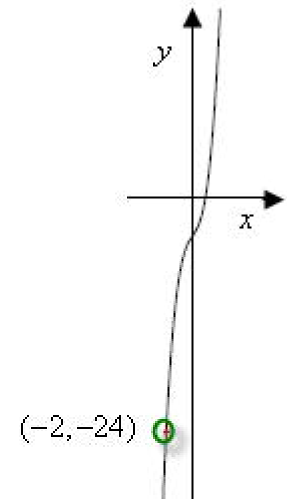
ב. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}2x^3+2x-4 & x\neq 2\\ \varnothing & x=2\end{cases}$

$f'(x)=6x^2+2$ חיובי עבור $x\neq 2$ (שעבורו הפונקציה אינה מוגדרת)

הפונקציה עולה עבור $x>2$ או $x<2$

הפונקציה יורדת – אף x

(2) הסקיצה המתאימה, כאשר נקודת אי הרציפות $f(2)=2\cdot(-2)^3+2\cdot(-2)-4=-24=(-2,-24)$

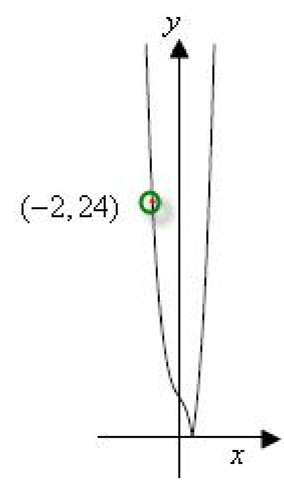


ג. $g(x)=|f(x)|$, ובהתאם ערכי $g(x)$ נגדיים לערכי $f(x)$ עבור $x<1$ שהוא האפס של $f(x)$

$g(x)=\begin{cases}2x^3+2x-4 & x\geq 1\\ \varnothing & x=2\\ -2x^3-2x+4 & x<1, x\neq -2\end{cases}$

כאשר נקודת אי הרציפות $(-2,24)$

למעשה, עבור $x<1$ "מקפלים" את גרף הפונקציה סביב ציר ה- x



א. נתונה הפונקציה: $f(x)=2-\cos x-\sin^2 x$ **בתחום** $-\pi \le x \le \pi$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, כלומר** $f(0)=2-\cos 0-\sin^2 0=1 \quad \to (0,1)$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **,**

אולם כיוון ש- $-1\le \sin x, \cos x \le 1$ **וכאשר** $\cos x=\pm1 \to \sin^2 x=0$ **הרי** $2-\cos x-\sin^2 x$ ***לא* יתאפס לעולם.**

תשובה: $(0,1)$

ב. נמצא את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור:

$$f(-\pi)=2-\cos(-\pi)-\sin^2(-\pi)=3 \quad \to (-\pi,3), \quad f(\pi)=2-\cos\pi-\sin^2\pi=3 \quad \to (\pi,3)$$

$$\boxed{f'(x)=\sin x-2\sin x\cos x}$$

$$0=\sin x-2\sin x\cos x \quad \to 0=\sin x(1-2\cos x)$$

$$\sin x=0 \quad \cos x=0.5$$

$$x=\pi k \quad x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \quad x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$$

$$k=0 \quad \to x=0$$

$$k=1 \quad \to x=\pi, \quad x=\frac{\pi}{3}, \quad x=-\frac{\pi}{3}$$

$$k=-1 \quad \to x=-\pi$$

$$f(-\frac{\pi}{3})=2-\cos(-\frac{\pi}{3})-\sin^2(-\frac{\pi}{3})=0.75 \quad \to (-\frac{\pi}{3},0.75), \quad f(\frac{\pi}{3})=2-\cos\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}=0.75 \quad \to (\frac{\pi}{3},0.75)$$

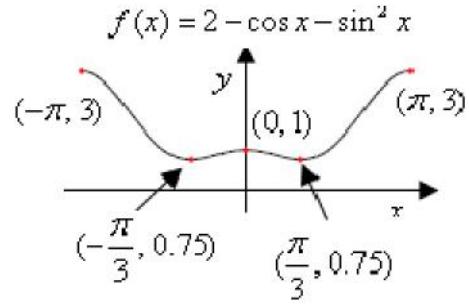
נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה ונזהה את הקיצון המוחלט.

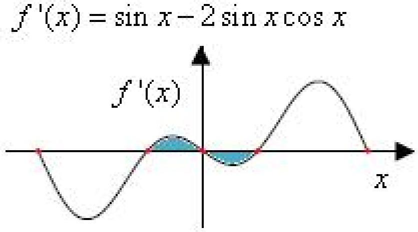
לצורך סעיף ג' נסמן גם את סימני הנגזרת, ונרשום את ערכיה בנקודות הקצה (נמצאו במהלך סעיף זה)

x	π		$\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		$-\pi$
$f(x)$	3		0.75		1		0.75		3
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0
מסקנה	**Max**	↗	**Min**	↘	**Max**	↗	**Min**	↘	**Max**

תשובה: $(\pi,3)$ **,** $(-\pi,3)$ **מקסימום מוחלט ,** $(-\frac{\pi}{3},0.75)$ **,** $(\frac{\pi}{3},0.75)$ **מינימום מוחלט**

ג. (1) נצייר סקיצה מתאימה של הפונקציה **(2) נצייר סקיצה מתאימה של נגזרת הפונקציה**





(3) נחשב את השטח המבוקש, המורכב משני שטחים כחולים, כמסומן בציור הקודם.

$$S = \int_{-\pi/3}^{0} (f'(x) - 0)dx + \int_{0}^{\pi/3} (0 - f'(x))dx$$

$$S = f(0) - f(-\frac{\pi}{3}) + (-f(\frac{\pi}{3}) - (-f(0))$$

$$S = 2f(0) - f(-\frac{\pi}{3}) - f(\frac{\pi}{3})$$

$$\mathrm{S} = 2 \cdot 1 - 0.75 - 0.75$$

$$S = 0.5$$

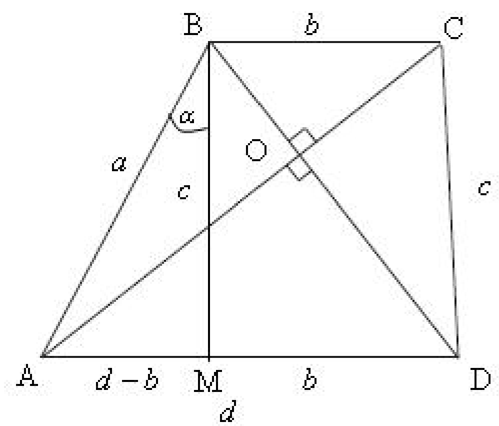
תשובה: גודל השטח הוא 0.5 יח"ר.

ד. רק אם נעשה הסטה אנכית של 1 יחידות, גרף הפונקציה ישיק לציר ה- x פעם אחת בלבד,

במקרה זה נקבל את הפונקציה $y = 1 - \cos x - \sin^2 x$ ובהתאם $\boxed{a = 1}$

תשובה: $a = 1$

א. נעלה את השרטוט המעודכן, כולל לסעיף ב, והסברים בהתאם:



ABCD **טרפז,** $AD \parallel BC$ **(נתון)**

$BM \parallel CD$ **(נתון)**

DCBM **מקבילית (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות)**

$BM = CD = c$ **(צלעות נגדיות שוות במקבילית)**

$MD = BC = b$ **(צלעות נגדיות שוות במקבילית)**

$AM = d - b$ **(הפרש קטעים)**

ניעזר במשפט פיתגורס בארבעה משולשים

$$\left.\begin{array}{ll}\underline{\Delta AOB}: & a^2 = BO^2 + AO^2 \\ \underline{\Delta COD}: & c^2 = CO^2 + DO^2\end{array}\right\} a^2 + c^2 = BO^2 + AO^2 + CO^2 + DO^2$$

$$\left.\begin{array}{ll}\underline{\Delta BOC}: & b^2 = BO^2 + CO^2 \\ \underline{\Delta AOD}: & d^2 = AO^2 + DO^2\end{array}\right\} b^2 + d^2 = BO^2 + AO^2 + CO^2 + DO^2$$

ועל פי כלל המעבר $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

הוכח

ב. נשתמש במשפט הקוסינוסים

$$\underline{\Delta BAM}: \quad AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos\angle ABM$$

$$(d-b)^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\sim$$

$$d^2 - 2bd + b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\sim$$

$$-2bd = -2ac \cdot \cos\sim \quad \leftarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

$$\boxed{\cos\sim = \frac{bd}{ac}}$$

הוכח

ג. (1) נמצא את שטח המשולש ABM

$$S_{\Delta ABM} = \frac{AB \cdot MB \cdot \sin\angle ABM}{2} = \frac{ac\sin\sim}{2} = \frac{\frac{bd}{\cos\sim}\sin\sim}{2} = \boxed{\frac{bd\tan\sim}{2}}$$

(2) נמצא את שטח הטרפז ABCD :

משפט סינוסים:

$$\underline{\Delta BAM}: \quad \frac{a}{\sin\sphericalangle BMA} = \frac{d-b}{\sin\sim} \quad \to \sin\sphericalangle BMA = \frac{a\sin\sim}{d-b} \quad \to \sin\sphericalangle BMD = \frac{a\sin\sim}{d-b}$$

$$S_{ABCD} = \frac{bd\tan\sim}{2} + bc\cdot\frac{a\sin\sim}{d-b} = \frac{bd\tan\sim}{2} + b\cdot\frac{\sin\sim}{d-b}\cdot\frac{bd}{\cos\sim} = \frac{bd\tan\sim(d-b+2b)}{2(d-b)} = \boxed{\frac{bd\tan\sim(d+b)}{2(d-b)}}$$