א. (1) נסמן ב- $t,\ p$ את זמני הליכת הולכי הרגל עד הפגישות שלהם עם רוכב האופניים (שעות) .

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
רוכב אופניים	מ- A עד הפגישה	$t-2$	v	$v(t-2)$
הולך רגל ראשון	מ- A עד הפגישה	t	4	$4t$
רוכב אופניים	מ- A עד הפגישה	$p-1$	v	$v(p-1)$
הולך רגל שני	מ- A עד הפגישה	p	5	$5p$

המרחקים שעברו רוכב האופניים והולך הרגל הראשון עד הפגישה שווים.

כלומר המשוואה המתאימה: $v(t-2)=4t$

נביע באמצעות v את הזמן שעבר מהשעה $08:00$:

$$v(t-2)=4t$$
$$vt-2v=4t$$
$$vt-4t=2v$$
$$t(v-4)=2v$$
$$\boxed{t=\frac{2v}{v-4}}$$

את התחום בו נמצא פתרון הבעיה נפתור בסעיף ב (לסעיף זה בלבד $v>4$) .

תשובה: הזמן שעבר מהשעה $08:00$: ועד פגישת הרוכב עם הולך הרגל הראשון הוא $\frac{2v}{v-4}$

(2) המרחקים שעברו רוכב האופניים והולך הרגל השני עד הפגישה שווים.

כלומר המשוואה המתאימה: $v(p-1)=5t$

נביע באמצעות v את הזמן שעבר מהשעה $09:00$ ולאחר מכן נוסיף לו 1 לקבלת התשובה.

$$v(p-1)=5p$$
$$vp-v=5p$$
$$vp-5p=v$$
$$p(v-5)=v$$
$$p=\frac{v}{v-5}$$
$$p+1=\frac{v}{v-5}+1=\frac{v+v-5}{v-5}=\frac{2v-5}{v-5}$$
$$\boxed{p+1=\frac{2v-5}{v-5}}$$

את התחום בו נמצא פתרון הבעיה נפתור בסעיף ב (לסעיף זה בלבד $v>5$ או $0<v<2.5$).

תשובה: הזמן שעבר מהשעה $08:00$ **: ועד פגישת הרוכב עם הולך הרגל השני הוא** $\frac{2v-5}{v-5}$ **.**

ב. רוכב האופניים הדביק תחילה את הולך הרגל השני, וכעבור __יותר__ מ- 10 **דקות הדביק את הולך הרגל הראשון**

כלומר, הזמן בין הפגישות גדול מ- $\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$ **שעה.**

$$\frac{2v}{v-4}-\frac{2v-5}{v-5}>\frac{1}{6}$$

$$\frac{2v}{v-4}-\frac{2v-5}{v-5}-\frac{1}{6}>0$$

$$\frac{12v(v-5)-6(v-4)(2v-5)-(v-4)(v-5)}{6(v-5)(v-4)}>0$$

$$\frac{12v^2-60v-6(2v^2-5v-8v+20)-(v^2-5v-4v+20)}{6(v-5)(v-4)}>0$$

$$\frac{12v^2-60v-12v^2+78v-120-v^2+9v-20}{6(v-5)(v-4)}>0$$

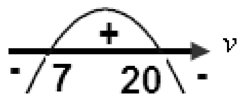
$$\frac{-v^2+27v-140}{6(v-5)(v-4)}>0$$

$$\frac{-v^2+27v-140}{6(v-5)(v-4)}>0$$

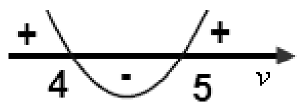
$$-v^2+27v-140=0$$

$$v_{1,2}=\frac{-27\pm 13}{-2}\quad \rightarrow v_1=7,\ v_2=20$$

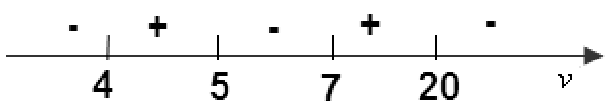
ציור סימני מונה אי השוויון



ציור סימני מכנה אי השוויון



פתרון אי השוויון, בעזרת טבלת סימנים:



כלומר $7<v<20$ **או** $4<v<5$ **.**

מכיוון ו- $v>5$ **, תהייה התשובה הסופית** $7<v<20$

תשובה: $7<v<20$

א. נתונה סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n^2+3n+2} \end{cases}$$

נוכיח כי לכל n **טבעי מתקיים** $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ **.**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

נתון: $a_1 = 0$ **.**

על פי הטענה $a_1 = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$

לכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $a_k = \dfrac{k-1}{k+1}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$a_{k+1} = \frac{k}{k+2}$$

נשתמש בכלל הנסיגה

$$\begin{aligned} & a_{k+1} = a_k + \frac{2}{k^2+3k+2} \\ \Leftrightarrow\ & a_{k+1} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} \quad \leftarrow induction \\ \Leftrightarrow\ & a_{k+1} = \frac{(k-1)(k+2)+2}{(k+1)(k+2)} \\ \Leftrightarrow\ & a_{k+1} = \frac{k^2+2k-k-2+2}{(k+1)(k+2)} \\ \Leftrightarrow\ & a_{k+1} = \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{a_{k+1} = \frac{k}{k+2}} \end{aligned}$$

מתקבל שהוכחנו את נכונות הטענה עבור $n=k+1$

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=2$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי זוגי**

אז היא נכונה עבור $n=k+2$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי זוגי.**

ב. (1) על פי כלל הנסיגה $a_{n+1}-a_n=\frac{2}{n^2+3n+2}$

כלומר: $\frac{2}{a_{n+1}-a_n}=(n+1)(n+2)$ **, שהיא מכפלה של שני מספרים עוקבים, ואחד מהם בהכרח זוגי**

תשובה: הביטוי $\frac{2}{a_{n+1}-a_n}$ **הוא מספר זוגי לכל** n **טבעי.**

(2) על פי סעיף (1) הביטוי $\frac{2}{a_{n+1}-a_n}$ **הוא מכפלה של מספר זוגי ומספר אי-זוגי,**

ויתחלק ב- 4 **ללא שארית רק עבור** n **שאינו מתחלק ב-** 4 **ללא שארית (כי אז** $\frac{n+2}{4}$ **יהיה שלם)**

תשובה: הביטוי $\frac{2}{a_{n+1}-a_n}$ **אינו מתחלק ב-** 4 **בלי שארית לכל** n **טבעי גדול מ-** 1.

ג. נתון כי ההפרש בין איבר מסוים בסדרה לבין האיבר שלפניו הוא $\frac{20}{99}\cdot 10^{-3}$ **.**

על פי הסעיף הקודם: $a_{n+1}-a_n=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)}=\frac{20}{99}\cdot 10^{-3}$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}}{(n+1)(n+2)}=\frac{{}^{1}\cancel{10}\,\cancel{20}}{99\cdot 10^{\cancel{3}\,2}}$$

$$9900=(n+1)(n+2)$$

קל לראות כי: $9900=99\cdot 100$ **ולכן** $n=98$

על פי טענת האינדוקציה, עבור $n=98$ **(זוגי)** $a_{98}=\frac{98-1}{98+1}=\frac{97}{99}$

$$a_{99}=\frac{97}{99}+\frac{20}{99}\cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{a_{99}=0.98}$$

תשובה: $a_{99}=0.98$.

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4}{3}x^3-a^2x+a^2$ **,** $a>0$ **.**

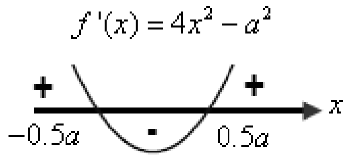
א. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ובהתאם:** $f(0)=\frac{4}{3}\cdot 0^3-a^2\cdot 0+a^2=a^2 \quad \rightarrow \boxed{(0,a^2)}$

תשובה: $(0,a^2)$

ב. (1) נמצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, ואת סוגן.

$$\boxed{f(x)=\frac{4}{3}x^3-a^2x+a^2}$$

$$\boxed{f'(x)=4x^2-a^2}$$



$$0=4x^2-a^2$$

$$4x^2=a^2$$

$$x^2=0.25a^2$$

$$x=0.5a \quad \rightarrow f(0)=\frac{4}{3}\cdot(0.5a)^3-a^2\cdot 0.5a+a^2=-\frac{a^3}{3}+a^2 \quad \rightarrow \boxed{(0.5a,\, a^2-\frac{a^3}{3})}$$

$$x=-0.5a \quad \rightarrow f(0)=\frac{4}{3}\cdot(-0.5a)^3-a^2\cdot(-0.5a)+a^2=\frac{a^3}{3}+a^2 \quad \rightarrow \boxed{(-0.5a,\, a^2+\frac{a^3}{3})}$$

נגזרת הפונקציה היא עם גרף של פרבולה בעלת מינימום,

כאשר הפונקציה עולה כאשר הנגזרת חיובית ויורדת כאשר הנגזרת שלילית.

עבור $x=0.5a$ **הפונקציה עוברת מירידה לעלייה ולכן מינימום.**

עבור הפונקציה עוברת מעלייה לירידה ולכן מקסימום.

תשובה: $(0.5a,\, a^2-\frac{a^3}{3})$ **מינימום ,** $(-0.5a,\, a^2+\frac{a^3}{3})$ **מקסימום.**

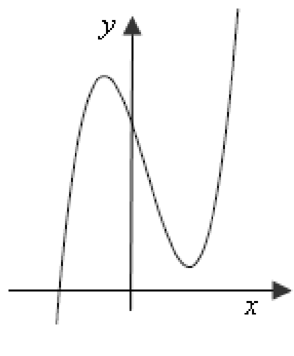
(2) ערך הפונקציה בנקודת המקסימום הוא $a^2+\frac{a^3}{3}$**, כלומר סכום של שני ביטויים חיוביים עבור** $a>0$,

כאשר שיעור ה- x **(**$-0.5a$**)**

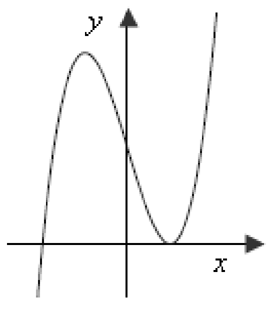
תשובה: ברביע השני.

ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה בשלושה מצבים, בהתאם למספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0$ **.**

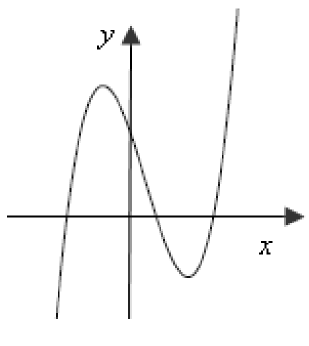
(1) פתרון אחד



(2) שני פתרונות



(3) שלושה פתרונות



ד. נמצא כיצד משפיע ערכו של a על סימן שיעור ה- y של נקודת המינימום שהוא $a^2-\frac{a^3}{3}$,

ובהתאם על מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0$.

$a^2-\frac{a^3}{3}=\frac{3a^2-a^3}{3}=\frac{a^2(3-a)}{3}$, כלומר סימן שיעור ה- y נקבע על ידי סימן הביטוי $3-a$, כאשר $a>0$.

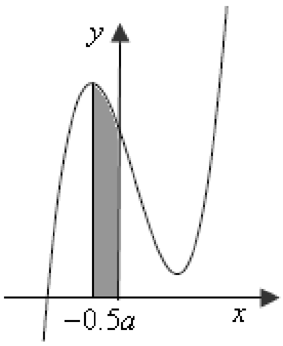
(1) שני פתרונות יתקבלו, כאשר $y_{\text{Min}}=0$. ולכן, תשובה: $a=3$

(2) שני פתרונות יתקבלו, כאשר $y_{\text{Min}}>0$, כלומר כאשר $a<3$ ומכיון ש- $a>0$ אז: תשובה: $0<a<3$

(1) שלושה פתרונות יתקבלו, כאשר $y_{\text{Min}}<0$, ולכן: תשובה: $a>3$.

ה. כיוון שנקודת המקסימום של הפונקציה ברביע השני, עבור $a>0$

אין השפעה לערכו המדויק של a על אופן חישוב השטח, שכולו ברביע השני.



$$S=\int_{-0.5a}^{0}(\frac{4}{3}x^3-a^2x+a^2-0)\,dx$$

$$S=(\frac{x^4}{3}-\frac{a^2x^2}{2}+a^2x)\Big]_{-0.5a}^{0}$$

$$S=(0)-(\frac{(-0.5a)^4}{3}-\frac{a^2\cdot(-0.5a)^2}{2}+a^2\cdot(-0.5a))$$

$$S=(0)-(\frac{a^4}{48}-\frac{a^4}{8}-\frac{a^3}{2})$$

$$S=\frac{5a^4}{48}+\frac{a^3}{2}$$

ובהתאם לנתון כי גודל השטח הוא $\frac{a^3}{2}+\frac{80}{3}$

$$\frac{5a^4}{48}+\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{2}+\frac{80}{3}$$

$$\frac{5a^4}{48}=\frac{80}{3}$$

$$a^4=256$$

$$a=4 \quad \leftarrow a>0$$

מכיוון ו- $a=4>3$, הרי שעל פי הסעיף הקודם יתקבלו שלושה פתרונות למשוואה $f(x)=0$.

תשובה: שלושה פתרונות.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(4x)$ **בתחום** $0\le x\le\frac{\pi}{4}$**.**

$\cos 2x\ge 0$ **בתחום הנתון, כי** $\cos\alpha\ge 0$ **בתחום** $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

$\sin 4x\ge 0$ **בתחום הנתון, כי** $\sin\alpha\ge 0$ **בתחום** $0\le x\le\pi$**.**

לכן $f(x)$ **היא סכום של שני מחוברים אי-שליליים, כלומר** $f(x)\ge 0$ **.**

תשובה: הוּכַח.

ב. נסמן את שיעורי הנקודה $A(t,\frac{3}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin\ 4t)$ **, כאשר שיעורי הנקודה חיוביים בתום** $0\le x\le\frac{\pi}{4}$**.**

הפונקציה שיש להביא *למינימום* **היא** *סכום המרחקים של הנקודה* A *מהצירים*,

ומכיוון שהנקודה ברביע הראשון, הפונקציה היא למעשה סכום שיעורי הנקודה.

$$\boxed{f(t)=t+\frac{3}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin\ 4t}$$

נמצא את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור:

$$f(0)=0+\frac{3}{2}\cos(2\cdot 0)+\frac{1}{4}\sin(4\cdot 0)=1.5\quad\rightarrow(0,1.5)$$

$$f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\cos(2\cdot\frac{\pi}{4})+\frac{1}{4}\sin(4\cdot\frac{\pi}{4})=0\quad\rightarrow(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$$

ולכן נקודות הקצה הן: $(0,1.5)$ **,** $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$

$$\boxed{f'(t) = 1 - 3\sin 2t + \cos 4t}$$

$$0 = 1 - 3\sin 2t + \cos 4t$$

$$0 = 1 - 3\sin 2t + 1 - 2\sin^2 2t \quad \leftarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 2x$$

$$2\sin^2 2t + 3\sin 2t - 2 = 0$$

$$(\sin 2t)_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\sin 2t = 0.5 = \sin\frac{p}{6} \qquad \cancel{\sin 2x = -2} \qquad \leftarrow -1 \le \sin x \le 1$$

$$2x = \frac{p}{6} + 2p k \qquad 2x = \frac{5p}{6} + 2p k$$

$$x = \frac{p}{12} + 2p k \qquad x = \frac{5p}{12} + p k$$

$$k = 0 \quad \to x = \frac{p}{12}$$

$$f(\frac{p}{12}) = \frac{p}{12} + \frac{3}{2}\cos(2 \cdot \frac{p}{12}) + \frac{1}{4}\sin(4 \cdot \frac{p}{12})$$

$$= \frac{p}{12} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{p}{12} + \frac{7\sqrt{3}}{8} \to (\frac{p}{12}, \frac{p}{12} + \frac{7\sqrt{3}}{8}) = (\frac{p}{12}, 1.778)$$

ושיעורי הנקודה החשודה כקיצון הם $(\frac{p}{12}, 1.778)$

נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה ונזהה את הקיצון המוחלט.

x	$\frac{p}{4}$		$\frac{p}{12}$		0
$f(x)$	$\frac{p}{4}$		1.778		1.5
$f'(x)$					
מסקנה	**Min**	↘	**Max**	↖	**Min**

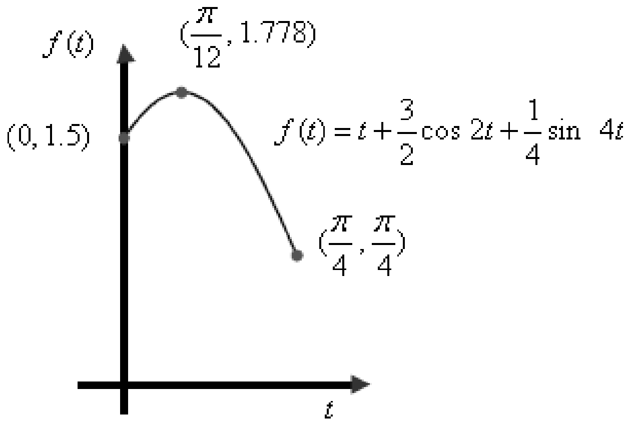
על פי הטבלה, וגם על פי הסרטוט בסעיף ג, הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 1.778 **.**

תשובה: הערך המקסימלי של סכום המרחקים של הנקודה A **מהצירים הוא** 1.778**.**

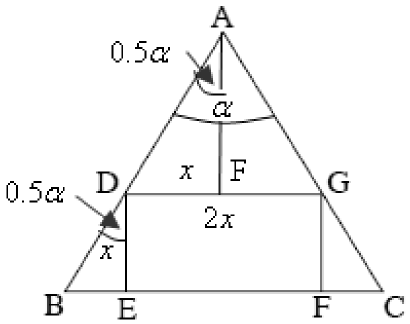
ב. על פי הטבלה, וגם על פי הסרטוט בסעיף ג, הערך המינימלי של הפונקציה הוא $\frac{p}{4} = 0.7854$ **.**

תשובה: הערך המקסימלי של סכום המרחקים של הנקודה A **מהצירים הוא** $\frac{p}{4} = 0.7854$**.**

ג. הסרטוט המתאים



5



AF חוצה זווית הראש (בניית עזר) במשולש שווה שוקיים.

לכן ההמשך שלו יהיה גובה לבסיס,

ועקב שצלעות המלבן מקבילות זו לזו, הרי ש- $AF \perp DG$.

בהתאם ΔADG שווה שוקיים, ולכן $DF = GF$.

גם $DE \parallel AF$ ולכן : $\angle BDE = \angle DAF = 0.5\alpha$.

נסמן $DE = x$ ולכן $DF = x$, $DG = 2DE = 2x$.

(זווית היקפית שווה לחצי הקשת עליה היא נשענת)

תשובה: $\angle BAC = 60°$

<u>ΔADF</u>

$$\sin 0.5\alpha = \frac{DF}{AD} \quad \rightarrow AD = \frac{x}{\sin 0.5\alpha}$$

<u>ΔBDE</u>

$$\cos 0.5\alpha = \frac{DE}{BD} \quad \rightarrow BD = \frac{x}{\cos 0.5\alpha}$$

$$AB = \frac{x}{\sin 0.5\alpha} + \frac{x}{\cos 0.5\alpha}$$

$$AB = \frac{x\cos 0.5\alpha + x\sin 0.5\alpha}{\sin 0.5\alpha \cos 0.5\alpha}$$

$$AB = \frac{x(\cos 0.5\alpha + \sin 0.5\alpha)}{0.5\sin\alpha}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{x(\cos 0.5\alpha + \sin 0.5\alpha)}{0.5\sin\alpha}\right)^2 \sin\alpha$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(\cos^2 0.5\alpha + 2\cos 0.5\alpha \sin 0.5\alpha + \sin^2 0.5\alpha)}{0.25\sin^2\alpha} \cdot \sin\alpha$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{x^2(1+\sin\alpha)}{0.5\sin\alpha}$$

נמצא עבור אילו ערכי α שטח המלבן $DEFG$ הוא $\frac{3}{8}$ משטח המשולש ABC .

$$2x^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^2(1+\sin\alpha)}{0.5\sin\alpha} \quad / : x^2 \neq 0$$

$$8\sin\alpha = 3 + 3\sin\alpha$$

$$5\sin\alpha = 3$$

$$\sin\alpha = 0.6$$

$$\boxed{\alpha = 36.87°, \quad \alpha = 143.13°}$$

תשובה: $\alpha = 36.87°, \quad \alpha = 143.13°$