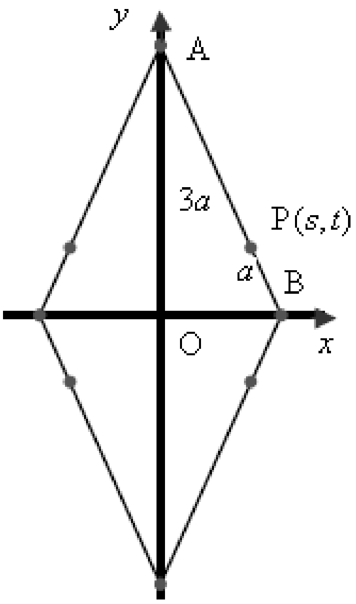
א. (1) כיוון שלא נתון על אילו קרניים של הצירים ממוקמות הנקודות A ו- B, יש ארבע אפשרויות לציור.

נסמן $P(s,t)$, נקודה על המקום הגיאומטרי

(ברביע הראשון, מבלי להגביל את הכלליות),

כאשר על פי הנתון $\frac{AP}{PB}=3$.



על פי נוסחת חלוקת קטע ביחס נתון:

$$s=\frac{1\cdot 0+3x_B}{4} \qquad t=\frac{1\cdot y_A+3\cdot 0}{4}$$

$$x_B=\frac{4}{3}s \qquad 4t=y_A$$

$$B(\frac{4}{3}s,0) \quad , \quad A(0,4t)$$

אורך הקטע AB הוא $\mathbf{l}$ $(\mathbf{l}\neq 0)$.

על פי משפט פיתגורס:

$$(\frac{4}{3}s)^2+(4t)^2=\mathbf{l}^2$$

$$\frac{16s^2}{9}+16t^2=\mathbf{l}^2$$

$$\boxed{\frac{16x^2}{9}+16y^2=\mathbf{l}^2}$$

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא $\frac{16x^2}{9}+16y^2=\mathbf{l}^2$

(2) המקום הגיאומטרי הוא אליפסה, ונראה זאת בהרחבה.

$$a^2=\frac{9\mathbf{l}^2}{16} \quad \to a=\frac{3}{4}\mathbf{l}$$

$$b^2=\frac{\mathbf{l}^2}{16} \quad \to b=\frac{1}{4}\mathbf{l}$$

$$c^2=a^2-b^2=\frac{\mathbf{l}^2}{2} \quad \to F_2(-\frac{\mathbf{l}}{\sqrt{2}},0), \quad F_1(\frac{\mathbf{l}}{\sqrt{2}},0)$$

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא <u>אליפסה</u>.

ב. רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOB **הוא** 4 **ו-** $\frac{\text{OA}}{\text{OB}}=3$ **.**

כיוון שמשולש AOB **ישר זווית, הרי מרכז המעגל החוסם הוא אמצע היתר** AB **, ומכאן ש-** $\text{AB}=8$ **.**

נסמן: $\text{OB}=x \quad \rightarrow \text{OA}=3x$

ומכאן ש- $\text{AB}=8$ **.**

נשתמש במשפט פיתגורס ובקשר שבין שיעורי הנקודה P **לשיעורי הנקודות** A **ו-** B **.**

$$(3x)^2+x^2=8^2$$

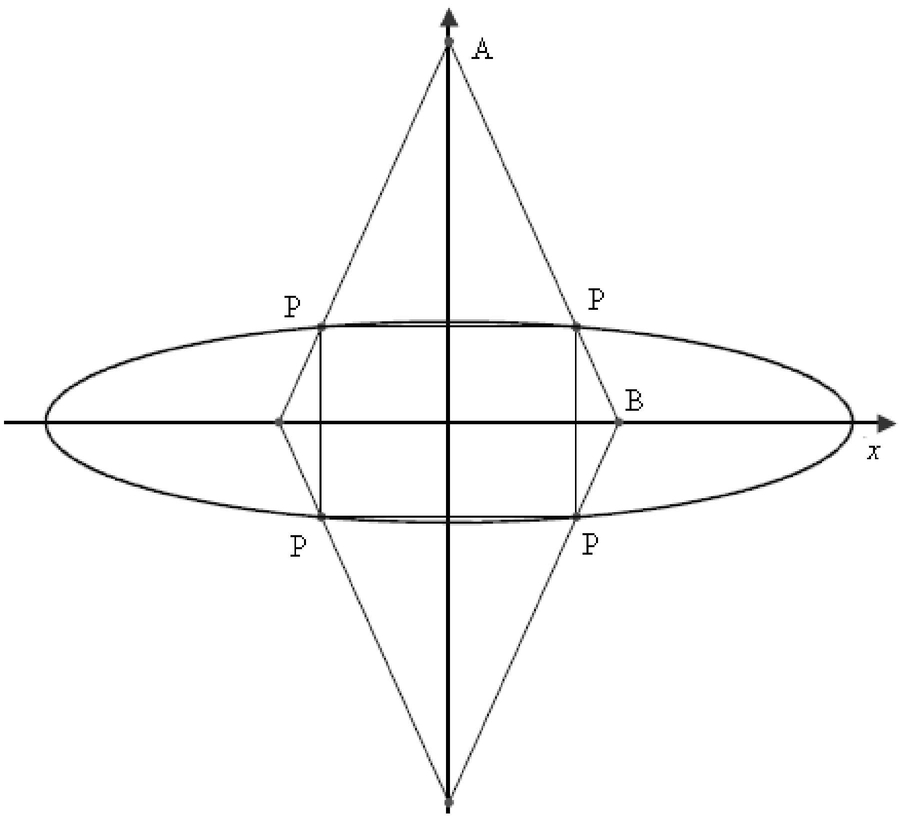
$$10x^2=64$$

$$x=\pm\sqrt{6.4}\rightarrow 3x=\pm 3\sqrt{6.4}$$

$$x_{\text{P}}=\frac{3x_{\text{B}}}{4} \qquad y_{\text{P}}=\frac{y_{\text{A}}}{4}$$

$$\text{P}(\pm\frac{3\sqrt{6.4}}{4},\pm\frac{3\sqrt{6.4}}{4})$$

הצורה מתקבלת היא ריבוע.



אורך צלע הריבוע $\frac{3\sqrt{6.4}}{4}-(-\frac{3\sqrt{6.4}}{4})=1.5\sqrt{6.4}$

היקף הריבוע: $4\cdot 1.5\sqrt{6.4}=6\sqrt{6.4}=15.18$

תשובה: היקף המצולע 15.18 **יח'.**

א. נתונה היפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ **. אחד המוקדים של ההיפרבולה הוא** $(8,0)$

ההיפרבולה שוות שוקיים $(a=b)$ **,**

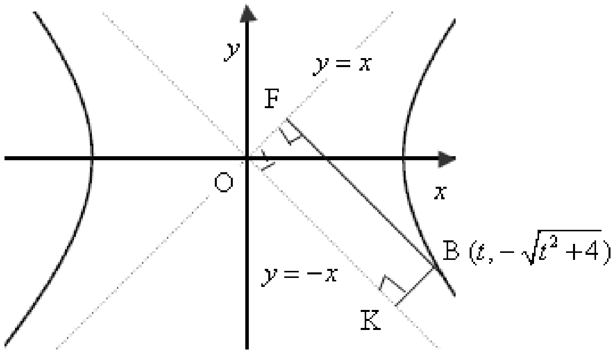
לכן משוואות האסימפטוטות המאונכות זו לזו הן: $y=x,\quad y=-x$ **(או** $x+y=0,\quad -x+y=0$**)**

בהיפרבולה מתקיים $a^2+b^2=c^2$ **, כאשר על פי הנתון** $c=8$ **.**

בהתאם: $a=\sqrt{32} \quad \rightarrow a^2=32 \quad \rightarrow 2a^2=64$ **ומשוואת ההיפרבולה:** $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{32}=1$ **, או** $x^2-y^2=32$ **.**

נסמן את שיעורי הנקודה $(t,-\sqrt{t^2+32})$ **, מבלי להגביל את הכלליות, ונמצא את שטח המלבן שנוצר.**

בלא קשר למיקום הנקודה B **היא תמיד מעל לאסימפטוטה אחת ומתחת לשנייה.**



$$\mathrm{BF}=\frac{\left|-t-\sqrt{t^2+32}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|t+\sqrt{t^2+32}\right|}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{BK}=\frac{\left|t-\sqrt{t^2+32}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|t-\sqrt{t^2+32}\right|}{\sqrt{2}}$$

$$S_{\mathrm{OFBK}}=\frac{\left|t+\sqrt{t^2+32}\right|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\left|t-\sqrt{t^2+32}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|t^2-(t^2+32)\right|}{2}=16$$

תשובה: שטח המרובע OFBK **הוא** 16 **יח"ר.**

ב. האסימפטוטות להיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **הן:** $y=-\frac{b}{a}x,\ y=\frac{b}{a}x$

משוואת ישר המקביל לאסימפטוטה הוא למשל $y=\frac{b}{a}x+n$ **,** $(n\neq 0)$

נציב במשואת ההיפרבולה: $b^2x^2-a^2(\frac{b}{a}x+n)^2=a^2b^2$

$$b^2x^2-\frac{a^2b^2x^2}{a^2}-\frac{2a^2bnx}{a}-n^2a^2=a^2b^2$$

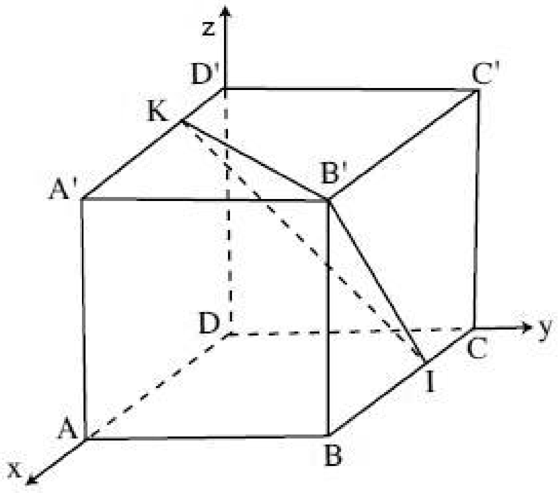
$$b^2x^2-b^2x^2-2abnx-n^2a^2=a^2b^2$$

$$-2abnx-n^2a^2=a^2b^2 \quad /:a\neq 0$$

$$-2bnx-an^2=ab^2$$

$$x=-\frac{a(b^2+n^2)}{2bn}$$

תשובה: יש נקודת חיתוך אחת.



א. משוואת מישור הבסיס ABCD **היא** $p_1: \quad z=0$

שיעורי קדקודי הקובייה הם:

$D(0,0,0), \quad A'(a,0,a), \quad B'(a,a,a), \quad C'(0,a,a), \quad D'(0,0,a)$

$A'K=\frac{2}{3}A'D'$, $BI=\frac{2}{3}BC$ **ולכן על פי נוסחת חלוקת קטע ביחס ו**

נמצא את הווקטור המאונך למישור KB'I**, ולכן מאונך לכל וקטור ו**

$\overrightarrow{KB'}=\underline{B'}-\underline{K}=\underline{x}=(\frac{2a}{3},a,0), \quad \overrightarrow{IB'}=\underline{B'}-\underline{I}=\underline{x}=(\frac{2a}{3},0,a)$

$$\left.\begin{array}{l} (r,s,t)\,(\frac{2a}{3},a,0)=0 \quad \rightarrow \frac{2ar}{3}+as=0 \quad /:a\neq 0 \\ (r,s,t)\,(\frac{2a}{3},0,a)=0 \quad \rightarrow \frac{2ar}{3}+at=0 \quad /:a\neq 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2r+3s=0 \\ 2r+3t=0 \end{array}\right\} s=t, \quad s=1 \quad \rightarrow t=1 \quad \rightarrow r=-1.5 \quad \rightarrow \boxed{\underline{x}=p(-1.5,1,1)}$$

וההצגה הפרמטרית של האנך מקדקוד C' **למישור** KB'I **היא** $h:\underline{x}=(0,a,\ a)+p(-1.5,1,1)$ **,**

כאשר נקודה טיפוסית עליו היא $(-1.5p,\ a+p,\ a+p)$ **.**

נציב את הנקודה הטיפוסית במשוואת מישור הבסיס ABCD $p_1: \quad z=0$

ונקבל $p=-a \quad \leftarrow \quad a+p=0$ **ומכאן שנקודת החיתוך היא** $\boxed{(1.5a,0,0)}=(-1.5(-a),\ a+(-a),\ a+(-a))$

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך הם $(1.5a,0,0)$ **.**

ב. נמצא את משוואת המישור KB'I**, שהנורמל שלו הוא** $h:\underline{x}=(-1.5,1,1)$**, כלומר:** $p_2: -1.5x+y+z+d=0$

נציב שיעורי הקדקוד $B'(a,a,a)$ **ונקבל:** $-1.5\cdot a+a+a+d=0 \quad \rightarrow d=-0.5a$ **ולכן:** $p_2:\ -1.5x+y+z-0.5a=0$

מרחק הנקודה $N(1.5a,0,0)$ **מהמישור** KB'I **הוא** $\frac{22}{\sqrt{17}}$**.**

$$\frac{22}{\sqrt{17}}=\frac{|-1.5\cdot 1.5a+0+0-0.5a|}{\sqrt{1.5^2+1^2+1^2}} \quad \rightarrow \frac{22}{\sqrt{17}}=\frac{|-2.75a|}{\sqrt{4.25}}$$

$$11=|-2.75a| \quad \rightarrow \boxed{a=4} \quad \leftarrow a>0$$

משוואת מישור הפאה DCC'D **היא** $p_3: \quad x=0$ **ושטח הפאה** 16 **יח"ר** $=4^2$

עבור $a=4$ **שיעורי קדקוד** $N(6,0,0)$ **ומרחקו מהפאה** 6 **יחידות.**

נפח הפירמידה BDCC'D' **הוא** $V=\frac{16\cdot 6}{3}=32$**.**

תשובה: נפח הפירמידה 32 **יחידות נפח.**

נכתב ע"י עפר ילין

4א

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} z+\overline{w}^3=0 \\ z\cdot w^5=1 \end{cases}$$

w **ו-** z **הם מספרים מרוכבים, ונתון** $|z|=|w|=1$**.**

נסמן $w=a+bi$ **, ונמצא את ערך המכפלה** $w\cdot\overline{w}$ **.**

$w\cdot\overline{w}=(a+bi)(a-bi)$

$w\cdot\overline{w}=a^2+b^2$

$|w|=1 \quad \rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=1 \quad \rightarrow a^2+b^2=1$

$\boxed{w\cdot\overline{w}=1}$

נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} z+\overline{w}^3=0 \\ z\cdot w^5=1 \end{cases}$$

$z=-\overline{w}^3$

$-\overline{w}^3\cdot w^5=1$

$-\overline{w}^3\cdot w^3\cdot w^2=1$

$-(\overline{w}\cdot w)^3\cdot w^2=1$

$-1^3\cdot w^2=1$

$w^2=-1$

$\boxed{w=i} \quad \rightarrow z=-\overline{w}^3=-(-i)^3 \quad \rightarrow \boxed{z=-i}$

$\boxed{w=-i} \quad \rightarrow z=-\overline{w}^3=-i^3 \quad \rightarrow \boxed{z=i}$

תשובה: $w=i$ **,** $z=-i$ **או** $w=-i$ **,** $z=i$ **.**

יש לפתור את האי-שוויון: $\left|4i-1-\log_2 x\right|^2 \ge 25$ **(תחום הגדרה** $x>0$ **)**.

הערך המוחלט של מספר מרוכב $z=a+bi$ **הוא** $\sqrt{a^2+b^2}$

$$\left|4i-1-\log_2 x\right|^2 \ge 25$$

$$\sqrt{(16+(1+\log_2 x)^2}^2 \ge 25$$

$$16+(1+\log_2 x)^2 \ge 25$$

$$(1+\log_2 x)^2 \ge 9$$

$$1+\log_2 x \ge 3 \qquad\qquad 1+\log_2 x \le -3$$

$$\log_2 x \ge 2 \qquad\qquad \log_2 x \le -4$$

$$\boxed{x \ge 4} \qquad\qquad x \le 2^{-4} = \frac{1}{16} \quad \rightarrow \boxed{0 < x \le \frac{1}{16}} \quad \leftarrow x>0$$

הבסיס גדול מ- 1 **לכן** $\log_2 x$ **פונקציה עולה, ובהתאם לא הוחלף כיוון סימן אי השוויון.**

תשובה: $x \ge 4$ **או** $0 < x \le \frac{1}{16}$

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$ **, המוגדרת לכל** x **, והנגזרת שלה** $f'(x)=(\frac{e^x-3}{e^x+3})^2$ **.**

נגזרת הפונקציה מתאפסת עבור $x=\ln 3 \quad \to e^x=3$ **, אולם הנגזרת היא אי-שלילית ולכן אין נקודות קיצון.**

תשובה: לפונקציה אין נקודות קיצון.

(2) עבור $x=\ln 3$ **,** $f'(x)=0$ **והנגזרת אינה משנה סימן, לכן זו נקודת פיתול בה המשיק מקביל לציר ה-** x **.**

מעבר לכך, $f''(x)=\frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}$ **אינה מתאפסת, למעט עבור** $x=\ln 3$ **וזו נקודת הפיתול היחידה.**

תשובה: $x=\ln 3$

ב. (1) $f''(x)=0$ **עבור** $x=\ln 3$ **, חיובית עבור** $x>\ln 3$ **ושלילית עבור** $x<\ln 3$ **.**

לכן $f'(x)$ **יורדת עבור** $x<\ln 3$ **ועולה עבור** $x>\ln 3$ **, ובהתאם** $x=\ln 3$ **מינימום של** $f'(x)$

תשובה: $x=\ln 3$ **מינימום.**

(2) $f'(x)=(\frac{e^x-3}{e^x+3})^2$ **מוגדרת לכל** x **ואין אסימפטוטה אנכית.**

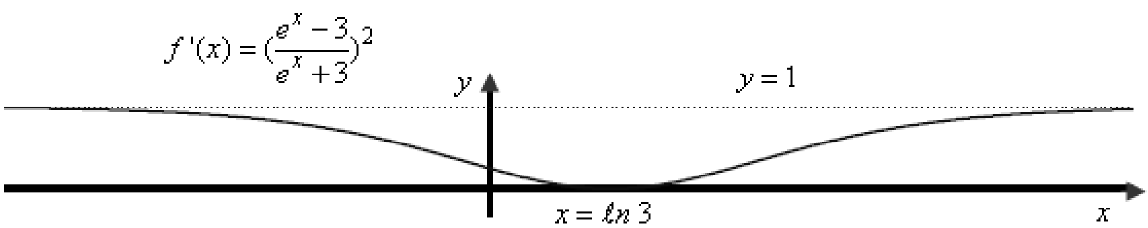
$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^x-3}{e^x+3})^2=\lim_{x\to+\infty}(\frac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{3}{e^x}})^2=(\frac{1-0}{1+0})^2=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{e^x-3}{e^x+3})^2=(\frac{0-3}{0+3})^2=(-1)^2=1$$

ובהתאם הישר $y=1$ **, מהווה אסימפטוטה אופקית**

תשובה: $y=1$.

(3) סרטוט גרף הנגזרת $f'(x)$



ג. (1) נמצא את שיעורי ה- x **בין הפונקציות** $f''(x)=\frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}$ **ו-** $f'(x)=(\frac{e^x-3}{e^x+3})^2$

$$\frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}=(\frac{e^x-3}{e^x+3})^2$$

$$\frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}=\frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$

$$12e^x(e^x-3)=(e^x+3)(e^x-3)^2$$

$$12e^x(e^x-3)-(e^x+3)(e^x-3)^2=0$$

$$(e^x-3)(12e^x-(e^x+3)(e^x-3)=0$$

$$(e^x-3)(12e^x-(e^{2x}-9)=0$$

$$(e^x-3)(-e^{2x}+12e^x+9)=0$$

$$\boxed{x=\ln 3}$$

$$-e^{2x}+12e^x+9=0$$

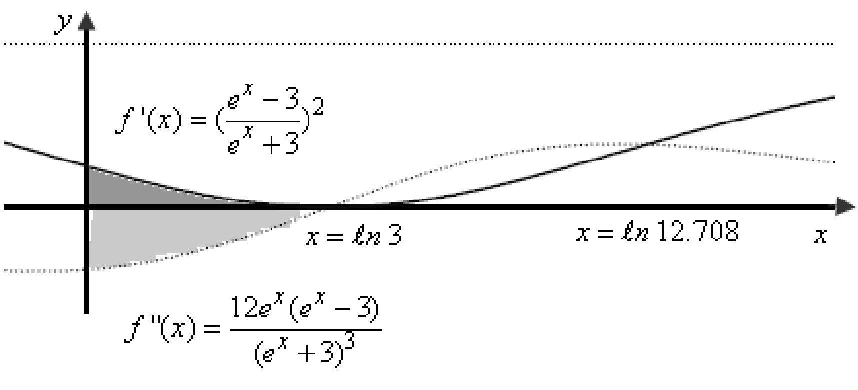
$$(e^x)_{1,2}=\frac{-12\pm 13.416}{-2}$$

$$\cancel{e^x=-0.708}$$

$$e^x=12.708 \quad \to \boxed{x=\ln 12.708}$$

תשובה: $x=\ln 3$ **,** $x=\ln 12.708$

(2) נמצא את גודל השטח הירוק:



$$S=\int_0^{\ln 3}(f'(x)-f''(x))dx=(f(x)-f'(x))\Big]_0^{\ln 3}$$

$$S=(f(\ln 3)-f'(\ln 3))-(f(0)-f'(0))$$

$$S=(\ln 3+2-\frac{4\cdot 3}{3+3}-(\frac{3-3}{3+3})^2)-(0+2-\frac{4\cdot 1}{1+3}-(\frac{1-3}{1+3})^2)$$

$$S=\ln 3+2-2-0-2+1+0.25$$

$$\boxed{S=\ln 3-0.75}$$

תשובה: גודל השטח $\ln 3-0.75$ **.**

נכתב ע"י עפר ילין