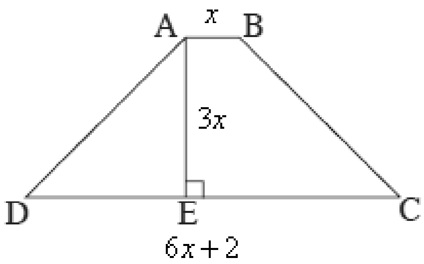
א. (1) נציג את הנתונים על ציור מתאים משמאל.



נסמן ב- x **את אורך הבסיס** AB **(ס"מ).**

הגובה AE **של הטרפז גדול פי** 3 **מהבסיס** AB**.**

לכן: $AE=3x$**.**

הבסיס DC **גדול ב-** 2 **ס"מ מ-** $2\cdot AE$**,**

$$DC=2\cdot AE+2=2\cdot 3x+2 \quad \rightarrow DC=6x+2$$

לפי נוסחת שטח טרפז : $S_{ABCD}=\frac{(DC+AB)\cdot AE}{2}$

נפתור את המשוואה המתאימה:

$$48=\frac{(6x+2+x)\cdot 3x}{2} \quad /\cdot 2$$

$$96=(7x+2)\cdot 3x$$

$$96=21x^2+6x$$

$$0=21x^2+6x-96$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm 90}{42}$$

$$x_1=\frac{-6+90}{42}=\frac{84}{42}=2$$

$$x_2=\frac{-6-90}{42}=\frac{-96}{42}<0$$

$$\boxed{x=2} \quad \leftarrow x>0$$

תשובה: האורך של הבסיס AB **הוא** 2 **ס"מ.**

(2) $DC=6x+2=6\cdot 2+2=14$

תשובה: האורך של הבסיס DC **הוא** 14 **ס"מ.**

בדיקה: $S_{ABCD}=\frac{(14+2)\cdot 6}{2}=48$

א. (1) נציב את שיעורי הנקודה $(8,2)$ שעל המעגל,

במשוואת המעגל $(x-2)^2+(y-a)^2=a^2$ **.**

$$(8-2)^2+(2-a)^2=a^2$$
$$36+(2-a)(2-a)=a^2$$
$$36+4-2a-2a+a^2=a^2$$
$$-4a=-40 \quad /:(-4)$$
$$\boxed{a=10}$$

תשובה: $a=10$

(2) נציב $a=10$ **ונמצא את משוואת המעגל.**

תשובה: משוואת המעגל $(x-2)^2+(y-10)^2=100$

(3) שיעורי מרכז המעגל $\mathrm{M}(2,10)$ **.**

תשובה: $\mathrm{M}(2,10)$

ב. כיוון ששיעור ה- y **של מרכז המעגל הוא** 10**, הרי שמרחקו מציר ה-** x **הוא** 10**.**

10 **הוא בדיוק אורכו של הרדיוס, ולכן המעגל ישיק לציר ה-**x **רק פעם אחת, בנקודה** $\mathrm{A}(2,0)$

תשובה: הוּכַח.

ג. אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה.

ארבעת המשולשים חופפים (זהים) זה לזה ולכן שטחיהם שווים

שטח משולש הוא מחצית מכפלת צלע בגובה שלה, כאשר $\mathrm{MA}=\mathrm{MA}=R=10$

$$S_{\Delta\mathrm{BMA}}=\frac{10\cdot 10}{2}=50$$

ולכן שטח הריבוע הוא 200 **יח"ר** $=50\cdot 4$

תשובה: שטח הריבוע הוא 200 **יח"ר** $=50\cdot 4$

נתונה הפונקציה $f(x)=2x+\dfrac{a}{x-3}+6$

א. לפונקציה $f(x)$ **יש נקודת קיצון בנקודה שבה גרף הפונקציה חותך את ציר ה-** y **.**

כלומר עבור $x=0$ **מתקיים** $f'(x)=0$ **.**

$$f'(x)=2-\frac{a}{(x-3)^2}$$

$$0=2-\frac{a}{(0-3)^2}$$

$$0=2-\frac{a}{9} \quad /9$$

$$0=18-a$$

$$\boxed{a=18}$$

תשובה: $a=18$

נציב $a=18$ **ונקבל** $\boxed{f(x)=2x+\dfrac{18}{x-3}+6}$

ב. תחום ההגדרה הוא $x\neq 3$ **, כי עבור** $x=3$ **המכנה מתאפס.**

תשובה: $x\neq 3$

ג. נמצא את נקודות הקיצון ואת סוגן :

$$f'(x)=2-\frac{18}{(x-3)^2}$$

$$0=2-\frac{18}{(x-3)^2} \quad \rightarrow 0=2(x-3)^2-18$$

$$0=2(x-3)(x-3)-18 \quad \rightarrow 0=2(x^2-3x-3x+9)-18$$

$$0=2x^2-6x-6x+18-18$$

$$0=2x^2-12x$$

$$0=2x(x-6)$$

$$x_1=0 \quad \rightarrow y=2\cdot 0+\frac{18}{0-3}+6=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$$

$$x_2=6 \quad \rightarrow y=2\cdot 6+\frac{18}{6-3}+6=24 \quad \rightarrow \boxed{(6,24)}$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה

$$f'(-1)=2-\frac{18}{(-1-3)^2}>0,\quad f'(1)=2-\frac{18}{(1-3)^2}<0$$

$$f'(5)=2-\frac{18}{(5-3)^2}<0,\quad f'(7)=2-\frac{18}{(7-3)^2}>0$$

-1	0	1	3	5	6	7	x
+	0	**-**	$x\neq 0$	**-**	0	**+**	y'
↗	**Max**	↘		↘	**Min**	↗	**מסקנה**

ב- $x=0$ **עוברים מעלייה לירידה ולכן מקסימום .**

ב- $x=6$ **עוברים מירידה לעלייה ולכן מינימום .**

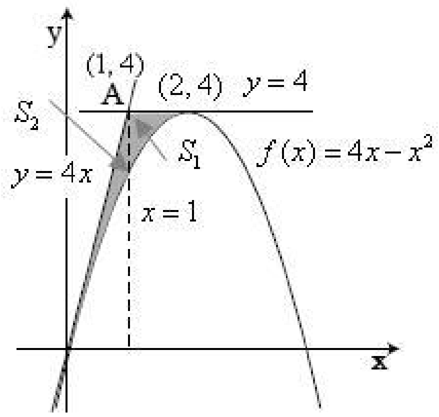
תשובה: $(0\,,0)$ **מקסימום ,** $(6\,,24)$ **מינימום.**

ד. על פי טבלת עלייה וירידה, עבור $x=1$ **הפונקציה יורדת.**

$$y=2\cdot 1+\frac{18}{1-3}+6=-1\quad\rightarrow\boxed{(1\,,-1)}$$

תשובה: לדוגמה $(1\,,-1)$.

א. (1) נתונה פרבולה $f(x)=4x-x^2$ **.**



בנקודת המקסימום שווה ערך הנגזרת ל- 0

$$\boxed{y'=4-2x}$$

$$0=4-2x \quad \to 2x=4 \quad /:2$$

$$x=2 \quad \to y=4\cdot 2-2^2=4 \quad \to (2,4)$$

תשובה: $(2,4)$

(2) בנקודת המקסימום של הפונקציה ,

ומכיון שהמשיק בנקודה זו הוא פונקציה קבועה, משוואתו היא $y=4$

תשובה: $y=4$.

ב. נמצא את שיפוע המשיק בראשית הצירים: $y'(0)=4-2\cdot 0=4$

$$(0,0), \quad m=4$$

$$y-0=4(x-0) \quad \to y=4x$$

תשובה: $y=4x$ **.**

ג. (1) נמצא את שיעורי הנקודה A **:**

נקודת החיתוך של המשיק $y=4$ **ושל המשיק** $y=4x$ **,**

$4=4x \quad \to x=1= \quad \to \boxed{\mathrm{A}(1,4)}$ **לכן**

תשובה: $\mathrm{A}(1,4)$

(2) נחשב על ידי חלוקת השטח האפור לשני שטחים.

	S_1	S_2
פונקציה עליונה	$y=4$	$y=4x$
פונקציה תחתונה	$y=4x-x^2$	$y=4x-x^2$
x **גדול**	$x=2$	$x=1$
x **קטן**	$x=1$	$x=0$

$$S_1=\int_1^2 (4-(4x-x^2))\,dx=\int_1^2 (4-4x+x^2)\,dx$$

$$S_1=4x-\frac{4x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\Big]_1^2=(4\cdot 2-\frac{4\cdot 2^2}{2}+\frac{2^3}{3})-(4\cdot 1-\frac{4\cdot 1^2}{2}+\frac{1^3}{3})$$

$$S_1=2\frac{2}{3}-(2\frac{1}{3}) \quad \to \boxed{S_1=\frac{1}{3}}$$

$$S_2=\int_0^1 (4x-(4x-x^2))\,dx=\int_0^1 (4x-4x+x^2)\,dx=\int_0^1 (x^2)\,dx$$

$$S_2=\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=(\frac{1^3}{3})-(\frac{1^3}{3})=\frac{1}{3} \quad \to \boxed{S_2=\frac{1}{3}}$$

והשטח המבוקש: $S=S_1+S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

תשובה: $\frac{2}{3}$ **יח"ר.**

א. נתון כי $x, y > 0$ **כאשר** $xy = 75$ **, כלומר** $y = \frac{75}{x}$

הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *הסכום* $3x + y$.

$$\boxed{f(x) = 3x + \frac{75}{x}}$$

$$f'(x) = 3 - \frac{75}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3x^2 - 75}{x^2}}$$

$$0 = \frac{3x^2 - 75}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$0 = 3x^2 - 75$$

$$-3x^2 = -75 \quad / : (-3)$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \quad \leftarrow x > 0$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)

$$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 75 < 0, \quad f'(6) = 3 \cdot 6^2 - 75 > 0$$

x	6	5	4	0
y'	+	0	-	
מסקנה	↗	**Min**	↘	

ב- $x = 5$ **עוברים מירידה לעלייה ולכן מינימום , כאשר** $y = \frac{75}{5} = 15$

תשובה: $x = 5,\ y = 15$ **, עבורם הסכום** $3x + y$ **הוא מינימלי.**

ב. הסכום המינימלי הוא $3 \cdot 5 + 15 = 30$

תשובה: הערך המינימלי של הסכום הוא 30.

6 למבחן מותאם בלבד

א. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא** $f'(x)=81x^2-108x+a$ **.**

לפונקציה יש מקסימום בנקודה שבה $x=\frac{1}{3}$ **, כלומר** $f'(\frac{1}{3})=0$

$$0=81\cdot(\frac{1}{3})^2-108\cdot(\frac{1}{3})+a$$
$$0=-27+a$$
$$\boxed{a=27}$$

תשובה: $a=27$

נציב $a=27$ **ולכן הנגזרת של הפונקציה** $f(x)$ **היא** $f'(x)=81x^2-108x+27$ **.**

ב. נתון גם כי ערך הפונקציה בנקודת המקסימום שלה הוא 4**, כלומר** $(\frac{1}{3},4)$ **היא נקודת המקסימום.**

נמצא את הפונקציה הקדומה של $f'(x)$ **, כלומר את** $f(x)$ **:**

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$f(x)=\int(81x^2-108x+27)\,dx$$
$$f(x)=\frac{81x^3}{3}-\frac{108x^2}{2}+27x+c$$
$$f(x)=27x^3-54x^2+27x+c$$

נציב את שיעורי נקודת המקסימום $(\frac{1}{3},4)$ **בתבנית הפונקציה הקדומה:**

$$4=27\cdot(\frac{1}{3})^3-54\cdot(\frac{1}{3})^2+27\cdot(\frac{1}{3})+c$$
$$4=4+c$$
$$c=0$$
$$\boxed{f(x)=27x^3-54x^2+27x}$$

תשובה: $f(x)=27x^3-54x^2+27x$

ג. נמצא את נקודת המינימום של הפונקציה

$$f'(x)=81x^2-108x+27$$
$$0=81x^2-108x+27 \quad /:27$$
$$0=3x^2-4x+1$$
$$x_{1,2}=\frac{4\pm2}{6}$$
$$x_1=\frac{4+2}{6}=\frac{6}{6}=1 \quad \to f(1)=27\cdot1^3-54\cdot1^2+27\cdot1=0 \quad \to (1,0),\text{min?}$$
$$x_2=\frac{4-2}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad \text{max}$$

נוכיח את סוג הקיצון בעזרת נגזרת שנייה

$$f'(x)=81x^2-108x+27$$
$$\boxed{f''(x)=162x-108}$$
$$f''(1)=162\cdot1-108=6>0\to\text{min}$$

בנקודת הקיצון $(1,0)$ **משוואת המשיק היא פונקציה קבועה, בהתאם לשיעור ה-** y **של הנקודה.**

ולכן משוואת המשיק היא $y=0$ **.**

תשובה: משוואת המשיק בנקודת המינימום היא $y=0$ **.**