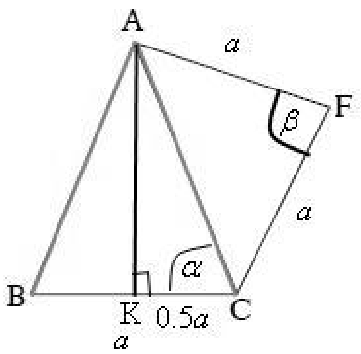
א. נבנה AK **גובה לבסיס** BC **במשולש שווה שוקיים** ABC **.**

לכן AK **הוא גם תיכון לבסיס, וחוצה זווית הראש.**

לכן $BK = 0.5a$ **.**



$\underline{\Delta ACK}$

$$\cos S ACK = \frac{CK}{AC}$$

$$\cos a = \frac{0.5a}{AC}$$

$$\boxed{AC = \frac{a}{2\cos a}}$$

תשובה: $AC = \dfrac{a}{2\cos a}$

(2) נשתמש במשפט הקוסינוסים.

$\underline{\Delta AFC}$

$$(AC)^2 = (AF)^2 + (CF)^2 - 2AF \cdot CF \cdot \cos S F$$

$$\left(\frac{a}{2\cos a}\right)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos b$$

$$\frac{a^2}{4\cos^2 a} = 2a^2 - 2a^2\cos b$$

$$2a^2\cos b = 2a^2 - \frac{a^2}{4\cos^2 a} \quad / : 2a^2 \neq 0$$

$$\boxed{\cos b = 1 - \frac{1}{8\cos^2 a}}$$

תשובה: הוכַח.

ב. נתון כי המשולש AFC **הוא ישר זווית, לכן** $b = 90°$ **,**

כי במשולש שווה שוקיים רק זווית הראש יכולה להיות ישרה.

$$\cos 90° = 1 - \frac{1}{8\cos^2 a} \quad \rightarrow 0 = 1 - \frac{1}{8\cos^2 a}$$

$$\frac{1}{8\cos^2 a} = 1 \quad \rightarrow \frac{1}{8} = \cos^2 a$$

$$\cos a = \pm\sqrt{0.125}$$

$$a = 69.3° \quad \leftarrow a < 90°$$

זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים

$$S BAC = 180° - 2 \cdot 69.3° = 41.4°$$

תשובה: $S BAC = 41.4°$, $S ACB = S ABC = 69.3°$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{a}{1-\sin x}$ **בתחום** $0\le x\le 2p$ **,** a **הוא פרמטר שונה מאפס.**

(1) נמצא את תחום ההגדרה $1-\sin x\ne 0 \quad \to \sin x\ne 1 \quad \to x\ne \dfrac{p}{2}+2pk$

עבור $k=0$ **נקבל** $x\ne \dfrac{p}{2}$

תשובה: $0\le x\le 2p$ **,** $x\ne \dfrac{p}{2}$

(2) $x=\dfrac{p}{2}$ **מאפס את מכנה הפונקציה ולא את המונה כי נתון** $a\ne 0$

לכן ערכי הפונקציה שואפים לישר: $x=\dfrac{p}{2}$ **שהוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.**

תשובה: $x=\dfrac{p}{2}$ **אסימפטוטה המקבילה לציר ה-** y ..

(3) עבור $x=p$ **הפונקציה יורדת, כלומר** $f'(p)<0$.

$$f'(x)=-\frac{a(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=\frac{a\cos x}{(1-\sin x)^2}$$
.
$$a\cos p<0 \quad \to -a<0 \quad \to \boxed{a>0}$$

תשובה הסימן של הפרמטר a **הוא חיובי.**

ב. (1) $f(p)=1$ **, ובהתאם:** $\dfrac{a}{1-\sin p}=1 \quad \to \boxed{a=1}$

תשובה: $a=1$

(2) נציב $a=1$ **ונקבל** $f(x)=\frac{1}{1-\sin x}$ **.**

נקודות קצה, על פי הנתון: $(2\pi,1)$, $(0,1)$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}}$$

$$0=\cos x$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

k	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$
0	**לא מוגדר**
1	$x=\frac{3\pi}{2}$

$$f(\frac{3\pi}{2})=\frac{1}{1-\sin\frac{3\pi}{2}}=\frac{1}{2}\quad\rightarrow(\frac{3\pi}{2},\frac{1}{2})$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה,

בעזרת ערכי הפונקציה והנגזרת (מכנה הנגזרת חיובי)

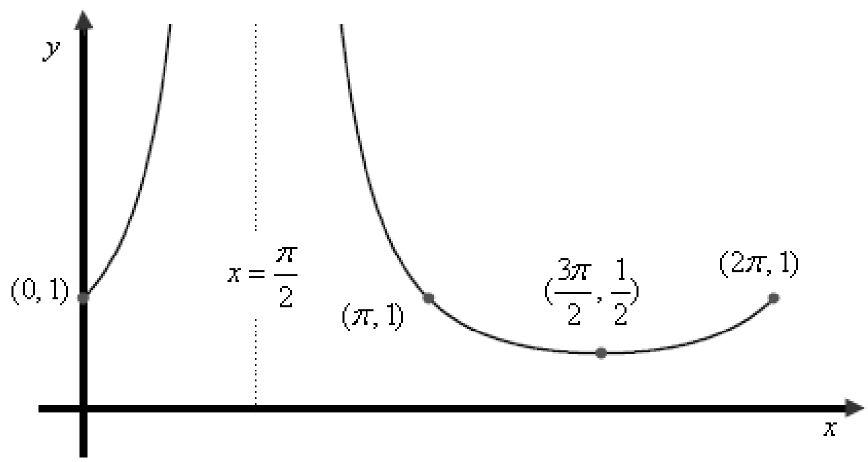
והנתון $f'(\pi)<0$.

$$f'(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{1-\sin\frac{\pi}{4}}>0,\quad f'(\pi)<0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f(x)$	1				0.5		1
$f'(x)$		$+$		$-$			
מסקנה		↗		↘		↗	

תשובה: $(2\pi,1)$ **מקסימום ,** $(\frac{3\pi}{2},\frac{1}{2})$ **,** $(0,1)$ **מינימום.**

ג. הסקיצה עבור $a=1$



א. נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{a-x^2}$ **,** a **הוא פרמטר גדול מאפס.**

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=0$, **הוא** 2 , **כלומר** $f'(0)=2$

$$f'(x)=\sqrt{a-x^2}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{a-x^2}}$$

$$2=\sqrt{a-0^2}-\frac{0^2}{\sqrt{a-0^2}}$$

$$\boxed{a=4}$$

תשובה: $a=4$

ב. נציב $a=4$ **ובהתאם** $\boxed{f(x)=x\sqrt{4-x^2}}$

(1) נמצא את תחום ההגדרה

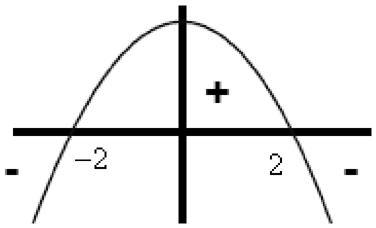
$$4-x^2\ge 0$$

$$(2-x)(2+x)=0$$

$$x=-2,\,2$$

ותחום ההגדרה נקבע

על פי הפרבולה ההפוכה



תשובה: $-2\le x\le 2$

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ובהתאם:** $f(0)=0\cdot\sqrt{4-0^2}=0 \quad \to (0,0)$

נקודות החיתוך עם ציר ה- x **הן** $(2,0)$ **,** $(-2,0)$ **,** $(0,0)$ **(והן גם נקודות קיצון קצה).**

תשובה: $(0,0)$ **,** $(2,0)$ **,** $(-2,0)$

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}}$$

$$0=4-2x^2$$

$$x^2=2 \quad \to x=\pm\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2})=\sqrt{2}\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}=2 \quad \to (\sqrt{2},2)$$

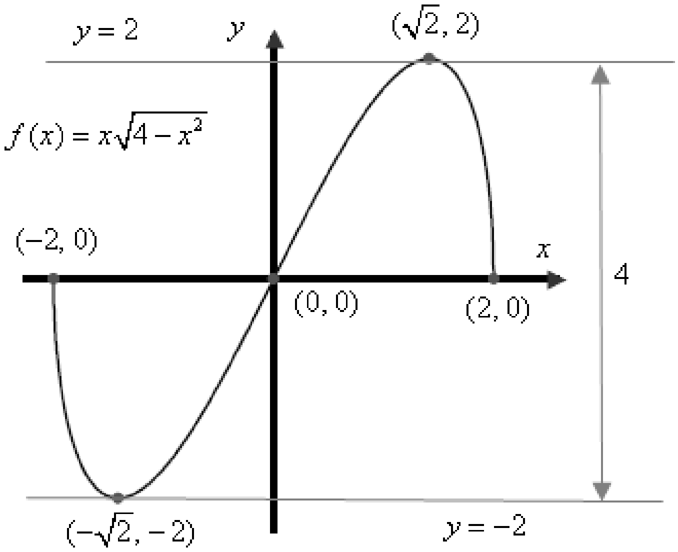
$$f(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}\sqrt{4-(-\sqrt{2})^2}=2 \quad \to (-\sqrt{2},2)$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
$f(x)$	0		-2		2		0
$f'(x)$							
מסקנה	Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה: $(2,0)$ **מינימום ,** $(\sqrt{2},2)$ **מקסימום,** $(-\sqrt{2},-2)$ **מינימום,** $(-2,0)$ **מקסימום.**

ג. הסקיצה המתאימה



ד. המשיקים, המקבילים לציר ה- x **, הם בעלי שיפוע** 0 **,**

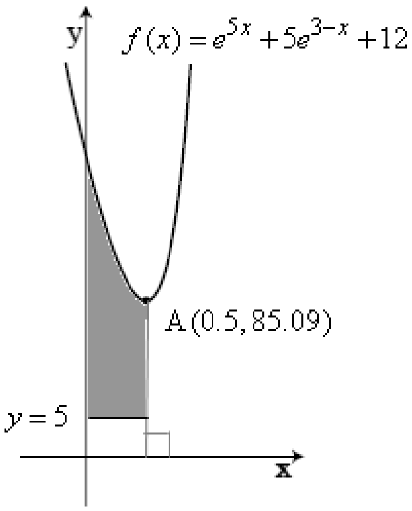
ומתקבלים על פי סעיף ב רק עבור $x=\pm\sqrt{2}$

ומשוואותיהם בהתאם הן $y=2$ **ו-** $y=-2$ **, כפי שניתן לראות בסקיצה.**

לכן המרחק בניהם הוא $2-(-2)=4$ **.**

תשובה: המרחק בין המשיקים הוא 4 **.**

א. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)=e^{5x}+5e^{3-x}+12$ **ונוכיח שהיא מינימום.**



$\boxed{f'(x)=5e^{5x}-5e^{3-x}}$

$0=5e^{5x}-5e^{3-x} \quad \rightarrow 5e^{3-x}=5e^{5x} \quad /:5$

$e^{3-x}=e^{5x} \quad \rightarrow 3-x=5x \quad \rightarrow 3=6x \quad \rightarrow x=0.5$

$f''(x)=\underset{+}{\underline{25e^{5x}}}\underset{+}{\underline{+5e^{3-x}}}>0 \quad \rightarrow x=0.5, Min$

$f(0.5)=e^{5\cdot 0.5}+5e^{3-0.5}+12=12+6e^{2.5}=85.09$

תשובה: $\mathrm{A}(0.5, 85.09)$ **מינימום.**

ב. נוריד אנך מנקודת המינימום לציר ה- x

ונעביר את הישר $y=5$ **.**

$$S=\int_0^{0.5}(e^{5x}+5e^{3-x}+12-5)dx$$

$$S=\frac{e^{5x}}{5}-5e^{3-x}+7x\Big]_0^{0.5}$$

$$S=(\frac{e^{5\cdot 0.5}}{5}-5e^{3-0.5}+7\cdot 0.5)-(\frac{e^{5\cdot 0}}{5}-5e^{3-0}+7\cdot 0)$$

$$S=(-4.8e^{2.5}+3.5)-(0.2-5e^{3})$$

$$S=5e^{3}-4.8e^{2.5}+3.3$$

$$S=45.252$$

תשובה: $5e^{3}-4.8e^{2.5}+3.3$ **יח"ר (או** 45.252 **יח"ר).**

נוסחת הגידול והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot a^t$, כאשר M_0 - הכמות ההתחלתית

a הוא גורם הגידול, M_t הכמות לאחר זמן t.

א. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי א' הוא $\frac{1}{2}$ שעה,

כלומר הכמות יורדת מ- M_0 ל- $0.5M_0$ ב- $\frac{1}{2}$ שעה.

$$0.5M_0 = M_0 \cdot q_1^{0.5} \quad / : M_0$$
$$0.5 = \sqrt{q_1}$$
$$\boxed{q_1 = 0.25}$$

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי ב' הוא שעה אחת,

כלומר הכמות יורדת מ- M_0 ל- $0.5M_0$ ב שעה, ולכן $\boxed{q_2 = 0.5}$

תשובה $q_1 = 0.25$, $q_2 = 0.5$.

ב. נבדוק כעבור כמה זמן תערובת המכילה 5 ק"ג חומר א' ו- 7 ק"ג חומר ב' תגיע למשקל כולל של 6 ק"ג.

$$5 \cdot 0.25^t + 7 \cdot 0.5^t = 6 \quad / \boxed{b = 0.5^t} \quad \to b^2 = 0.25^t$$
$$5b^2 + 7b - 6 = 0$$
$$b_{1,2} = \frac{-7 \pm 13}{10}$$
$$b = 0.6 \quad \leftarrow b > 0$$
$$0.6 = 0.5^t$$
$$\ln 0.6 = \ln 0.5^t$$
$$\ln 0.6 = t \ln 0.5$$
$$\frac{\ln 0.6}{\ln 0.5} = t$$
$$\boxed{t = 0.737}$$
$$0.737 \cdot 60 = 44.22 \min$$

תשובה: כעבור 44.22 דקות סכום הכמויות של שני החומרים בתערובת יהיה 6 ק"ג.