א. (1) נתונים שני ישרים שמשוואותיהם הן: $(m+2)x+y=3$

$$(3m+4)x+(m+2)y=m^2+4m+6$$

נביע את שיעורי נקודת החיתוך בין הישרים באמצעות m

ותוך כדי כך את התנאים לחיתוך ולהתלכדות.

ניתן, בקלות יחסית, לראות שעבור $m=-2$ **יתאפסו מקדמי המשתנים.**

נציב $m=-2$ **ונקבל:**

$$(-2+2)x+y=3 \quad \rightarrow 0x+y=3 \quad \rightarrow y=3$$

$$(3(-2)+4)x+(-2+2)y=(-2)^2+4(-2)+6 \quad \rightarrow -2x+0y=4 \quad \rightarrow x=-2$$

לכן יש פתרון יחיד ואין תנאי להתלכדות או להקבלה של ישרים.

$$\begin{cases}(m+2)x+y=3 \quad / -(m+2)\neq 0\\(3m+4)x+(m+2)y=m^2+4m+6\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-(m+2)^2x-(m+2)y=-3(m+2)\\(3m+4)x+(m+2)y=m^2+4m+6\end{cases}$$

$$-(m+2)^2x+(3m+4)x=-3(m+2)+m^2+4m+6$$

$$-(m^2+4m+4)x+3mx+4x=-3m-6+m^2+4m+6$$

$$-m^2x-4mx-4x+3mx+4x=m^2+m$$

$$-m^2x-mx=m^2+m$$

$$-m(m+1)x=m(m+1)$$

עבור $m=0$ **, או** $m=-1$ **נקבל פסוק אמת, (** $0x=0$ **),**

כלומר במקרה זה הישרים מתלכדים ואחרת נחתכים.

$$\boxed{x=-1}$$

$$(m+2)(-1)+y=3$$

$$-m-2+y=3$$

$$\boxed{y=5+m}$$

$$\boxed{(-1,5+m), \quad m\neq 0,-1}$$

תשובה: עבור $m\neq 0,-1$ **הישרים נחתכים**

(2) עבור $m=0$ **או** $m=-1$ **הישרים מתלכדים**

ב. שיעור ה- x **של נקודת החיתוך היחידה קבוע ושווה ל-** -1 **(רביע שני או שלישי)**

נדרוש ששיעור ה- y **יהיה חיובי:** $5+m>0 \quad \rightarrow m>-5$ **וכמובן, בתנאי של נקודת חיתוך אחת** $m\neq 0,-1$

תשובה: $m>-5, \quad m\neq 0,-1$

א. הסדרה מקיימת לכל n טבעי את כלל הנסיגה: $a_{n+1} = 4 + 2n - a_n$.

יש להוכיח כי $a_{n+2} - a_n = 2$

נפעיל פעמיים את כלל הנסיגה:

$$a_{n+2} = 4 + 2(n+1) - a_{n+1}$$
$$a_{n+2} = 4 + 2n + 2 - (4 + 2n - a_n)$$
$$a_{n+2} = 6 + 2n - 4 - 2n + a_n$$
$$\boxed{a_{n+2} - a_n = 2}$$

תשובה: הוכַח !

ב. המשמעות: ההפרש בין כל זוג איברים עם דילוג ביניהם, לא תלוי ב- n.

כלומר סדרת האיברים הזוגיים היא סדרה חשבונית עם $d = 2$ **ובה** a_2 **הוא האיבר הראשון.**

וגם סדרת האיברים האי-זוגיים היא סדרה חשבונית עם $d = 2$ **ובה** a_1 **הוא האיבר הראשון.**

נתון: $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{100} = 2250$ **.**

ניעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית : $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$**, עבור** $n = 50$ **בסדרת האיברים הזוגיים.**

$$2250 = \frac{50}{2}(2a_2 + 2(50-1))$$
$$2250 = 25(2a_2 + 98) \quad / : 25$$
$$90 = 2a_2 + 98$$
$$-2a_2 = 8 \quad / : (-2)$$
$$\boxed{a_2 = -4}$$

תשובה: $a_2 = -4$

ג. יש לחשב את סכום 50 **האיברים הראשונים במקומות האי-זוגיים בסדרה** $(a_1, a_3, a_5 \ ... \ a_{99})$ **.**

נמצא תחילה את a_1 **באמצעות כלל הנסיגה** $a_{n+1} = 4 + 2n - a_n$.

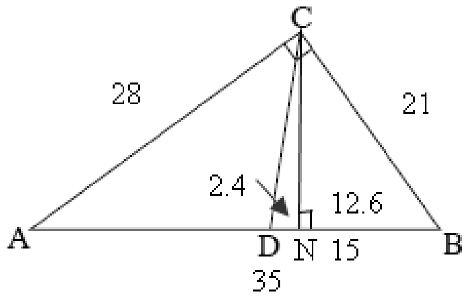
$$(n=1) \quad a_2 = 4 + 2 \cdot 1 - a_1$$
$$-4 = 6 - a_1$$
$$\boxed{a_1 = 10}$$

ניעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית עבור $n = 50$ **בסדרת האיברים האי זוגיים**

סכום 20 **האיברים במקומות האי-זוגיים:** $S_{50} = \frac{50}{2}(2 \cdot 10 + 2(50-1)) = 2950$

סכום 100 **האיברים הראשונים בסדרה:** $2950 + 2250 = 5200$

תשובה: סכום 100 **האיברים הראשונים בסדרה הנתונה הוא** 5200**.**



נתונים

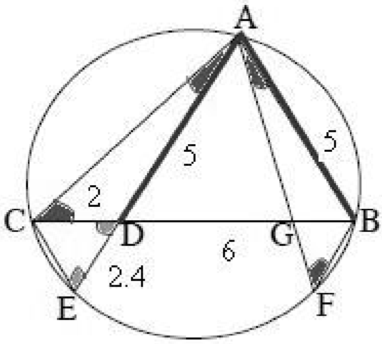
.1 $S ACB = 90°$ **.2** $S ACD = S BCD$ **.3** $BC =$ 21 **מ"מ**

.4 $AC =$ 28 **מ"מ** **.5** $CN \perp AB$

צ"ל: א. (1) $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$ **(2)** DB

ב. $\frac{CN}{AC} = \frac{BC}{AB}$ **ג.** DN

הסבר		טענה	נימוק
2	6	$S ACD = S BCD$	נתון
6	7	$\frac{DB}{AD} = \frac{BC}{AC}$	משפט חוצה זווית ΔABC
7	8	$DB \cdot AC = BC \cdot AD$	חישוב ע"י כפל בהצלבה
8	9	$DB \cdot AC = BC \cdot (AB - DB)$	הפרש קטעים והצבה
9	10	$DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$	חישוב
		מ.ש.ל. א (1)	
1	11	$S ACB = 90°$	נתון
3	12	$BC =$ 21 **מ"מ**	נתון
4	13	$AC =$ 28 **מ"מ**	נתון
11, 12, 13	14	$AB =$ 35 **מ"מ**	משפט פיתגורס ΔABC
10, 12,13,14	15	$DB \cdot 28 = 21 \cdot 35 - 21 \cdot DB$	הצבה
15	16	$49 \cdot DB = 735$ $DB =$ 15 **מ"מ**	חישוב
		מ.ש.ל. א (2)	
5	17	$CN \perp AB$	נתון
11, 17	18	$S ACB = S CNB$ **(ז)**	שתיהן זוויות ישרות
	19	$S B = S B$ **(ז)**	זווית משותפת
18, 19	20	$\Delta BNC \sim \Delta BCA$	משפט דמיון זווית זווית
20	21	$\frac{NC}{CA} = \boxed{\frac{BC}{AB} = \frac{BN}{BC}}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
		מ.ש.ל. ב	
12, 14, 21	22	$\frac{21}{35} = \frac{BN}{21}$	הצבה
22	23	$BN =$ 12.6 **מ"מ**	חישוב
16, 23	26	$DN =$ 2.4 **מ"מ**	הפרש קטעים
		מ.ש.ל. ג	



נתונים

.1 $AD = AB$

.2 $\angle CAE = \angle BAF$

.3 $AB = 5$ **ס"מ** **.4** $DB = 6$ **ס"מ** **.5** $CD = 2$ **ס"מ** .

צ"ל

א. $\Delta ADC \cong \Delta ABF$

ב. $\angle CDE = \angle CED$

ג. ED

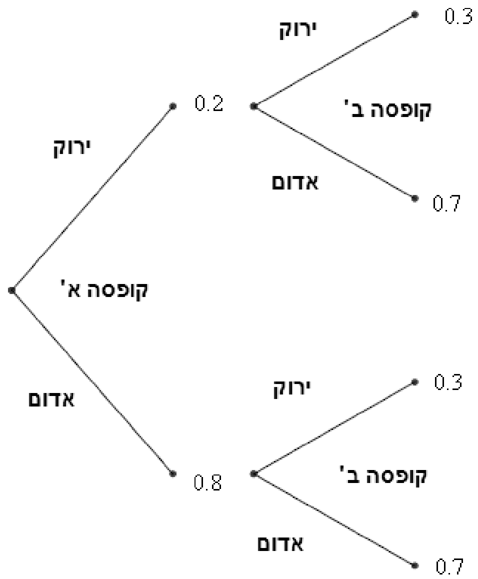
הוכחה

הסבר		טענה	נימוק
2	6	$\angle CAE = \angle BAF$ (ז)	נתון
1	7	$AD = AB$ (צ)	נתון
	8	$\angle ACD = \angle AFB$	זוויות היקפיות שוות הנשענות על קשת שווה $\overset{\frown}{AB}$
8 , 6	9	$\angle ABF = \angle ADC$ (ז)	משלימות ל- 180° במשולשים ABF ו- ADC
9 , 8 ,7	10	$\Delta ADC \cong \Delta ABF$	משפט חפיפה זווית צלע זווית
		מ.ש.ל. א	
	11	$\angle CDE = \angle ADB$	זוויות קדקודיות שוות זו לזו
	12	$\angle ADB = \angle ABC$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔADB
	13	$\angle CED = \angle ABC$	זוויות היקפיות שוות הנשענות על קשת שווה $\overset{\frown}{AC}$
11,12,13	14	$\angle CDE = \angle CED$	כלל מעבר
		מ.ש.ל. ב	
3	15	$AB = 5$ ס"מ	נתון
15 ,7	16	$AD = 5$ ס"מ	כלל המעבר
5	17	$CD = 2$ ס"מ	נתון
4	18	$DB = 6$ ס"מ	נתון
	19	$AD \cdot ED = CD \cdot DB$	שני מיתרים נחתכים במעגל, כך שמכפלת הקטעים הנוצרים שווה
16,17,18	20	$5 \cdot ED = 2 \cdot 6$	הצבה
20	21	$ED = 2.4$ ס"מ	חישוב
		מ.ש.ל. ג	

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים.

בקופסה א' יש 2 **כדורים ירוקים ו-** 8 **כדורים אדומים, לכן** $p(red)=0.8 \quad \rightarrow p(green)=\frac{2}{10}=0.2$

בקופסה ב' יש 3 **כדורים ירוקים ו-** 7 **כדורים אדומים, לכן** $p(red)=0.7 \quad \rightarrow p(green)=\frac{3}{10}=0.3$



נמצא מהי ההסתברות שמשתתף יזכה בתיק גב.

$$\mathrm{P}(backpack)=0.2\cdot 0.3=0.06$$

תשובה: ההסתברות היא 0.06.

ב. נמצא מהי ההסתברות שמשתתף יזכה בחפיסת שוקולד.

$$\mathrm{P}(\text{chokolate bar})=0.2\cdot 0.7+0.8\cdot 0.3=0.38$$

תשובה: ההסתברות היא 0.38.

ג. נמצא מהי ההסתברות שמשתתף זכה בתיק גב אם ידוע שזכה בפרס כלשהו.

$$\mathrm{P}(backpack\ /\ \text{prize})=\frac{\mathrm{P}(backpack\cap\text{prize})}{\mathrm{P}(\text{prize})}=\frac{0.06}{0.06+0.38}=\frac{0.06}{0.44}=0.1364$$

תשובה: ההסתברות היא 0.1364.

ד. (1) ההסתברות שמשתתף לא יזכה בפרס כלשהו היא $\mathrm{P}(\text{no prize})=0.8\cdot 0.7=0.56$ **.**

לכן , ההסתברות שכל אחד מ- n **משתתפים לא יזכה בפרס כלשהו היא** 0.56^n **.**

תשובה: ההסתברות היא 0.56^n.

(2) כיוון שבסיס החזקה (0.56 **) הוא מספר שבין** 0 **ל-** 1**,**

הרי שככל שמספר המשתתפים גדל ההסתברות תקטן.

תשובה: ההסתברותקטֵ נה.

א. נגדיר את הקבוצות הבאות

S - **קבוצת הנהגים הנחקרים**

A - **קבוצת מעורבים בתאונות,** $\overline{A}$ - **קבוצת הלא מעורבים בתאונות**

B - **קבוצת הנהגים הצעירים,** $\overline{B}$ - **קבוצת הנהגים המבוגרים**

C - **קבוצת הנוהגים במהירות גבוהה,** $\overline{C}$ - **קבוצת הנוהגים במהירות רגילה**

נתונים ומשמעויות

$$N(B) = 300, \quad N(\overline{B}) = 300 \quad \rightarrow N(S) = 600$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{300}{600} = 0.5$$

$$\boxed{P(B) = 0.5} \quad \rightarrow \boxed{P(\overline{B}) = 0.5}$$

$$P(A / B) = 0.4 \quad \rightarrow P(\overline{A} / B) = 0.6$$

$$P(B / \overline{A}) = \frac{6}{13} \quad \rightarrow P(\overline{B} / \overline{A}) = \frac{7}{13}$$

פיתוח נוסחאות של הסתברות מותנית

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$0.4 = \frac{P(A \cap B)}{0.5}$$

$$P(A \cap B) = 0.2$$

$$P(B / \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$\frac{6}{13} = \frac{0.3}{P(\overline{A})}$$

$$P(\overline{A}) = 0.65$$

נשלים את הנתונים בטבלה:

	A **מעורבים**	$\overline{A}$ **לא מעורבים**	
צעירים B	0.2	0.3	0.5
מבוגרים $\overline{B}$	0.15	0.35	0.5
	0.35	0.65	1

$$P(\overline{A} / \overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7$$

תשובה: פרופורציית הנהגים שלא היו מעורבים בתאונות דרכים מבין הנהגים המבוגרים היא 0.7 **.**

ב. נבדוק האם יש קשר סטטיסטי בין גיל הנהג למעורבות בתאונות דרכים.

$$P(A/B)=0.4$$

$$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.15}{0.5}=0.3$$

כלומר $P(A/\overline{B})>P(A/B)$ **ומכאן שקיים קשר סטטיסטי,**

ויש לכאורה אפשרות להניח שגיל צעיר מעלה את הסיכוי למעורבות בתאונות דרכים,

אולם כמובן ייתכנו גורמים מתווכים נוספים (כמו מין הנהג, תנאי הדרך, תקינות הרכב ומהירות הנהיגה).

תשובה: קיים קשר סטטיסטי כי $P(A/B)\neq P(A/\overline{B})$

ג. (1) נבדוק את קיום הקשר הסטטיסטי בכל אחת מהטבלאות

בקרב הנוהגים במהירות גבוהה - $\overline{C}$	**בקרב הנוהגים במהירות רגילה -** C
$P(A/B)=\frac{N(A\cap B)}{N(B)}=\frac{100}{200}=0.5$	$P(A/B)=\frac{N(A\cap B)}{N(B)}=\frac{20}{100}=0.2$
$P(A/\overline{B})=\frac{N(A\cap\overline{B})}{N(\overline{B})}=\frac{50}{100}=0.5$	$P(A/\overline{B})=\frac{N(A\cap\overline{B})}{N(\overline{B})}=\frac{40}{200}=0.2$

הן בקרב אלו שנוהגים במהירות גבוהה והן בקרב אלו הנוהגים במהירות רגילה

אין קשר סטטיסטי בין גיל הנהג למעורבות בתאונות דרכים.

תשובה: אין קשר סטטיסטי, בכל אחת מהטבלאות, בין גיל הנהג למעורבות בתאונות דרכים.

(2) הנתונים הנוספים עשויים לסתור את הטענה, כי מהירות הנהיגה הייתה גורם מתווך,

ובשל הצמדת גורמים התגלה קשר סטטיסטי בנתונים הראשוניים.

תשובה: הנתונים הנוספים עשויים לסתור את הטענה, כי לאחר שהפרדנו אותם בהתאם למהירות הנהיגה,

לא התגלה קשר סטטיסטי.

<u>הערה</u>

שיעור המעורבים בתאונות מבין הנוהגים במהירות גבוהה ($\frac{2}{3}$ **), גדול**

משיעור המעורבים בתאונות מבין הנוהגים במהירות רגילה ($\frac{1}{3}$ **),**

לכן ישנה אפשרות שקיים קשר סיבתי בין מהירות הנהיגה למעורבות בתאונות דרכים.

יחד עם זאת, ייתכנו גורמים מתווכים אחרים – כמו: מין הנהג, תנאי הדרך, תקינות הרכב ועוד.