

בגרות ע מאי 10 מועד קיץ גנז שאלון 35006

א. (1) נסמן ב- t, p את זמני הליכת הולכי הרגל עד הפגישות שלהם עם רוכב האופניים (שעות).

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

דרג-מרחק - s ק"מ	מהירות - v קמ"ש	זמן - t שעות		
$v(t-2)$	v	$t-2$	מ- A עד הפגישה	רוכב אופניים
$4t$	4	t	מ- A עד הפגישה	הולך רגל ראשון
$v(p-1)$	v	$p-1$	מ- A עד הפגישה	רוכב אופניים
$5p$	5	p	מ- A עד הפגישה	הולך רגל שני

המרחקים שעברו רוכב האופניים והולך הרגל הראשון עד הפגישה שווים.

$$v(t-2) = 4t \quad \text{כלומר המשוואה המתאימה:}$$

נביע באמצעות v את הזמן שעבר מהשעה 08:00:

$$v(t-2) = 4t$$

$$vt - 2v = 4t$$

$$vt - 4t = 2v$$

$$t(v-4) = 2v$$

$$t = \frac{2v}{v-4}$$

את התחום בו נמצא פתרון הבעיה נפתור בסעיף ב (לסעיף זה בלבד $v > 4$).

תשובה: הזמן שעבר מהשעה 08:00 ועד פגישת הרוכב עם הולך הרגל הראשון הוא $\frac{2v}{v-4}$

(2) המרחקים שעברו רוכב האופניים והולך הרגל השני עד הפגישה שווים.

$$v(p-1) = 5t \quad \text{כלומר המשוואה המתאימה:}$$

נביע באמצעות v את הזמן שעבר מהשעה 09:00 ולאחר מכן נוסיף לו 1 לקבלת התשובה.

$$v(p-1) = 5t$$

$$vp - v = 5t$$

$$vp - 5t = v$$

$$p(v-5) = v$$

$$p = \frac{v}{v-5}$$

$$p+1 = \frac{v}{v-5} + 1 = \frac{v+v-5}{v-5} = \frac{2v-5}{v-5}$$

$$p+1 = \frac{2v-5}{v-5}$$

את התחום בו נמצא פתרון הבעיה נפתור בסעיף ב (לסעיף זה בלבד $v > 5$ או $0 < v < 2.5$).

תשובה: הזמן שעבר מהשעה 08:00 ועד פגישת הרוכב עם הולך הרגל השני הוא $\frac{2v-5}{v-5}$.

ב. רוכב האופניים הדביק תחילה את הולך הרגל השני, וכעבור יותר מ-10 דקות הדביק את הולך הרגל הראשון

כלומר, הזמן בין הפגישות גדול מ- $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ שעה.

$$\frac{2v}{v-4} - \frac{2v-5}{v-5} > \frac{1}{6}$$

$$\frac{2v}{v-4} - \frac{2v-5}{v-5} - \frac{1}{6} > 0$$

$$\frac{12v(v-5) - 6(v-4)(2v-5) - (v-4)(v-5)}{6(v-5)(v-4)} > 0$$

$$\frac{12v^2 - 60v - 6(2v^2 - 5v - 8v + 20) - (v^2 - 5v - 4v + 20)}{6(v-5)(v-4)} > 0$$

$$\frac{12v^2 - 60v - 12v^2 + 78v - 120 - v^2 + 9v - 20}{6(v-5)(v-4)} > 0$$

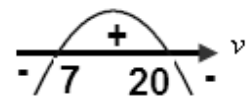
$$\frac{-v^2 + 27v - 140}{6(v-5)(v-4)} > 0$$

$$\frac{-v^2 + 27v - 140}{6(v-5)(v-4)} > 0$$

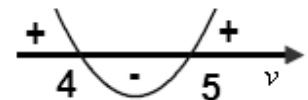
$$-v^2 + 27v - 140 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{-27 \pm 13}{-2} \rightarrow v_1 = 7, v_2 = 20$$

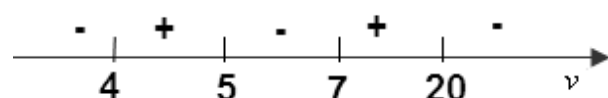
ציור סימני מונה אי השוויון



ציור סימני מכנה אי השוויון



פתרון אי השוויון, בעזרת טבלת סימנים:



כלומר $7 < v < 20$ או $4 < v < 5$.

מכיוון ו- $v > 5$, תהייה התשובה הסופית $7 < v < 20$

תשובה: $7 < v < 20$

א. נתונה סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n^2 + 3n + 2} \end{cases}$$

נוכיח כי לכל n זוגי מתקיים $a_n = \frac{n-1}{n+1}$.

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

נתון: $a_1 = 0$ ולכן על פי כלל הנסיגה: $a_2 = a_1 + \frac{2}{1^2 + 3 \cdot 1 + 2} = 0 + \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

על פי הטענה $a_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{2}{3}$

לכן הטענה נכונה עבור $n=2$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $a_k = \frac{k-1}{k+1}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$, לכן צ"ל

$$a_{k+2} = \frac{k+1}{k+3}$$

נשתמש פעמיים בכלל הנסיגה

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= a_{k+1} + \frac{2}{(k+1)^2 + 3(k+1) + 2} \\
\Leftrightarrow a_{k+2} &= a_k + \frac{2}{k^2 + 3k + 2} + \frac{2}{k^2 + 2k + 1 + 3k + 3 + 2} \\
\Leftrightarrow a_{k+2} &= a_k + \frac{2}{k^2 + 3k + 2} + \frac{2}{k^2 + 5k + 6} \\
\Leftrightarrow a_{k+2} &= \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} + \frac{2}{(k+2)(k+3)} \quad \leftarrow \text{induction} \\
\Leftrightarrow a_{k+2} &= \frac{k-1}{k+1} + \frac{2(k+3) + 2(k+1)}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2k+6+2k+2}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\
\Leftrightarrow a_{k+2} &= \frac{k-1}{k+1} + \frac{4k+8}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{4(k+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\
\Leftrightarrow a_{k+2} &= \frac{k-1}{k+1} + \frac{4}{(k+1)(k+3)} = \frac{(k-1)(k+3) + 4}{(k+1)(k+3)} \\
\Leftrightarrow a_{k+2} &= \frac{k^2 + 3k - k - 3 + 4}{(k+1)(k+3)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+3)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+3)} \\
\Leftrightarrow &\boxed{a_{k+2} = \frac{k+1}{k+3}}
\end{aligned}$$

מתקבל שהוכחנו את נכונות הטענה עבור $n = k + 2$

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n = 2$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n = k$ טבעי זוגי

אז היא נכונה עבור $n = k + 2$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי זוגי.

ב. (1) על פי כלל הנסיגה $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{n^2 + 3n + 2}$

כלומר: $\frac{2}{a_{n+1} - a_n} = (n+1)(n+2)$, שהיא מכפלה של שני מספרים עוקבים, ואחד מהם בהכרח זוגי

תשובה: הביטוי $\frac{2}{a_{n+1} - a_n}$ הוא מספר זוגי לכל n טבעי.

(2) על פי סעיף (1) הביטוי $\frac{2}{a_{n+1} - a_n}$ הוא מכפלה של מספר זוגי ומספר אי-זוגי,

ויתחלק ב-4 ללא שארית רק עבור n שאינו מתחלק ב-4 ללא שארית (כי אז $\frac{n+2}{4}$ יהיה שלם)

תשובה: הביטוי $\frac{2}{a_{n+1} - a_n}$ אינו מתחלק ב-4 בלי שארית לכל n טבעי גדול מ-1.

ג. נתון כי ההפרש בין איבר מסוים בסדרה לבין האיבר שלפניו הוא $\frac{20}{99} \cdot 10^{-3}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \quad \text{על פי הסעיף הקודם:}$$

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{20}{99} \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{1\cancel{2}}{(n+1)(n+2)} = \frac{1\cancel{1}0\cancel{2}0}{99 \cdot 10^{\cancel{3}2}}$$

$$9900 = (n+1)(n+2)$$

קל לראות כי: $9900 = 99 \cdot 100$ ולכן $n = 98$

$$a_{98} = \frac{98-1}{98+1} = \frac{97}{99} \quad \text{על פי טענת האינדוקציה, עבור } n = 98 \text{ (זוגי)}$$

$$a_{99} = \frac{97}{99} + \frac{20}{99} \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{a_{99} = 0.98}$$

תשובה: $a_{99} = 0.98$.

ע מאי 10 מועד קיץ גנוז שאלון 35006

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - a^2x + a^2$, $a > 0$.

א. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x = 0$ ובהתאם: $\boxed{(0, a^2)}$ $f(0) = \frac{4}{3} \cdot 0^3 - a^2 \cdot 0 + a^2 = a^2 \rightarrow$

תשובה: $(0, a^2)$

ב. (1) נמצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, ואת סוגן.

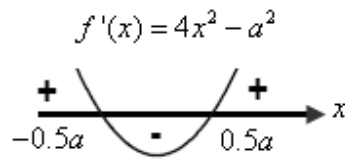
$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 - a^2x + a^2$$

$$f'(x) = 4x^2 - a^2$$

$$0 = 4x^2 - a^2$$

$$4x^2 = a^2$$

$$x^2 = 0.25a^2$$



$$x = 0.5a \rightarrow f(0) = \frac{4}{3} \cdot (0.5a)^3 - a^2 \cdot 0.5a + a^2 = -\frac{a^3}{3} + a^2 \rightarrow \left(0.5a, a^2 - \frac{a^3}{3}\right)$$

$$x = -0.5a \rightarrow f(0) = \frac{4}{3} \cdot (-0.5a)^3 - a^2 \cdot (-0.5a) + a^2 = \frac{a^3}{3} + a^2 \rightarrow \left(-0.5a, a^2 + \frac{a^3}{3}\right)$$

נגזרת הפונקציה היא עם גרף של פרבולה בעלת מינימום,

כאשר הפונקציה עולה כאשר הנגזרת חיובית ויורדת כאשר הנגזרת שלילית.

עבור $x = 0.5a$ הפונקציה עוברת מירידה לעלייה ולכן מינימום.

עבור הפונקציה עוברת מעלייה לירידה ולכן מקסימום.

תשובה: $(0.5a, a^2 - \frac{a^3}{3})$ מינימום, $(-0.5a, a^2 + \frac{a^3}{3})$ מקסימום.

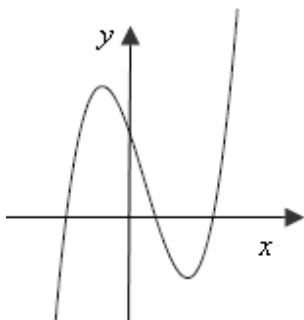
(2) ערך הפונקציה בנקודת המקסימום הוא $a^2 + \frac{a^3}{3}$, כלומר סכום של שני ביטויים חיוביים עבור $a > 0$,

כאשר שיעור ה- x $(-0.5a)$

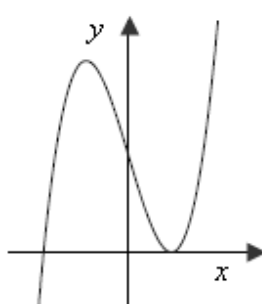
תשובה: ברביע השני.

ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה בשלושה מצבים, בהתאם למספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0$.

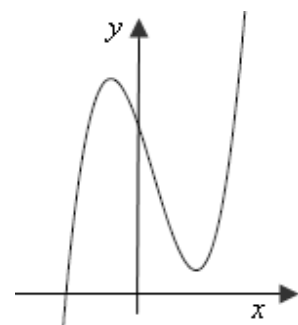
(3) שלושה פתרונות



(2) שני פתרונות



(1) פתרון אחד



ד. נמצא כיצד משפיע ערכו של a על סימן שיעור ה- y של נקודת המינימום שהוא $a^2 - \frac{a^3}{3}$,

ובהתאם על מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0$.

כלומר סימן שיעור ה- y נקבע על ידי סימן הביטוי $3-a$, כאשר $a > 0$.

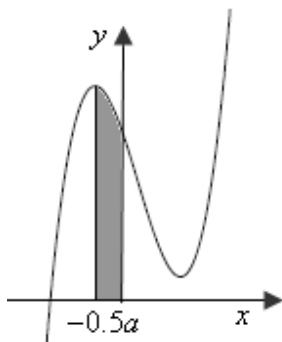
(1) שני פתרונות יתקבלו, כאשר $y_{\text{Min}} = 0$. ולכן, תשובה: $a = 3$

(2) שני פתרונות יתקבלו, כאשר $y_{\text{Min}} > 0$, כלומר כאשר $a < 3$ ומכיון ש- $a > 0$: תשובה: $0 < a < 3$

(1) שלושה פתרונות יתקבלו, כאשר $y_{\text{Min}} < 0$, ולכן: תשובה: $a > 3$

ה. כיוון שנקודת המקסימום של הפונקציה ברביע השני, עבור $a > 0$

אין השפעה לערכו המדויק של a על אופן חישוב השטח, שכולו ברביע השני.



$$S = \int_{-0.5a}^0 \left(\frac{4}{3}x^3 - a^2x + a^2 - 0 \right) dx$$

$$S = \left(\frac{x^4}{3} - \frac{a^2x^2}{2} + a^2x \right) \Big|_{-0.5a}^0$$

$$S = (0) - \left(\frac{(-0.5a)^4}{3} - \frac{a^2 \cdot (-0.5a)^2}{2} + a^2 \cdot (-0.5a) \right)$$

$$S = (0) - \left(\frac{a^4}{48} - \frac{a^4}{8} - \frac{a^3}{2} \right)$$

$$S = \frac{5a^4}{48} + \frac{a^3}{2}$$

ובהתאם לנתון כי גודל השטח הוא $\frac{a^3}{2} + \frac{80}{3}$

$$\frac{5a^4}{48} + \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2} + \frac{80}{3}$$

$$\frac{5a^4}{48} = \frac{80}{3}$$

$$a^4 = 256$$

$$a = 4 \leftarrow a > 0$$

מכיון ו- $a = 4 > 3$, הרי שעל פי הסעיף הקודם יתקבלו שלושה פתרונות למשוואה $f(x) = 0$.

תשובה: שלושה פתרונות.

א. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(4x)$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{p}{4}$.

$\cos 2x \geq 0$ בתחום הנתון, כי $\cos a \geq 0$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{p}{2}$

$\sin 4x \geq 0$ בתחום הנתון, כי $\sin a \geq 0$ בתחום $0 \leq x \leq p$

לכן $f(x)$ היא סכום של שני מחוברים אי-שליליים, כלומר $f(x) \geq 0$.

תשובה: הוכח.

ב. נסמן את שיעורי הנקודה $A(t, \frac{3}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 4t)$, כאשר שיעורי הנקודה חיוביים בתום $0 \leq x \leq \frac{p}{4}$.

הפונקציה שיש להביא לאינמימום היא סכום המרחקים fe הנקודה A מהצירים,

ומכיוון שהנקודה ברביע הראשון, הפונקציה היא למעשה סכום שיעורי הנקודה.

$$f(t) = t + \frac{3}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 4t$$

נמצא את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור:

$$f(0) = 0 + \frac{3}{2} \cos(2 \cdot 0) + \frac{1}{4} \sin(4 \cdot 0) = 1.5 \rightarrow (0, 1.5)$$

$$f\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p}{4} + \frac{3}{2} \cos\left(2 \cdot \frac{p}{4}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(4 \cdot \frac{p}{4}\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{p}{4}, \frac{p}{4}\right)$$

ולכן נקודות הקצה הן: $(0, 1.5)$, $\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{4}\right)$

$$f'(t) = 1 - 3\sin 2t + \cos 4t$$

$$0 = 1 - 3\sin 2t + \cos 4t$$

$$0 = 1 - 3\sin 2t + 1 - 2\sin^2 2t \quad \leftarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 2x$$

$$2\sin^2 2t + 3\sin 2t - 2 = 0$$

$$(\sin 2t)_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\sin 2t = 0.5 = \sin \frac{p}{6} \quad \sin 2x = -2 \quad \leftarrow -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$2x = \frac{p}{6} + 2pk \quad 2x = \frac{5p}{6} + 2pk$$

$$x = \frac{p}{12} + 2pk \quad x = \frac{5p}{12} + pk$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{p}{12}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{12}\right) &= \frac{p}{12} + \frac{3}{2} \cos\left(2 \cdot \frac{p}{12}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(4 \cdot \frac{p}{12}\right) \\ &= \frac{p}{12} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{p}{12} + \frac{7\sqrt{3}}{8} \rightarrow \left(\frac{p}{12}, \frac{p}{12} + \frac{7\sqrt{3}}{8}\right) = \left(\frac{p}{12}, 1.778\right) \end{aligned}$$

ושיעורי הנקודה החשודה בקיצון הם $\left(\frac{p}{12}, 1.778\right)$

נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה ונזהה את הקיצון המוחלט.

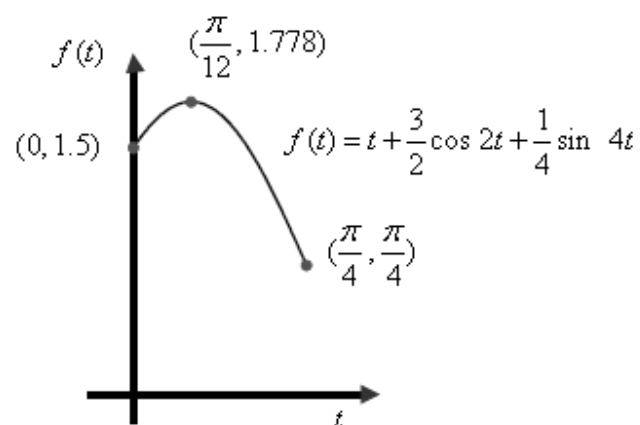
0		$\frac{p}{12}$		$\frac{p}{4}$	x
1.5		1.778		$\frac{p}{4}$	$f(x)$
					$f'(x)$
Min	↗	Max	↘	Min	מסקנה

א. על פי הטבלה, וגם על פי הסרטוט בסעיף ג, הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 1.778. תשובה: הערך המקסימלי של סכום המרחקים של הנקודה A מהצירים הוא 1.778.

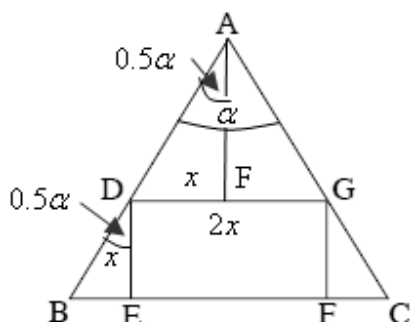
ב. על פי הטבלה, וגם על פי הסרטוט בסעיף ג, הערך המינימלי של הפונקציה הוא $\frac{p}{4} = 0.7854$.

תשובה: הערך המקסימלי של סכום המרחקים של הנקודה A מהצירים הוא $\frac{p}{4} = 0.7854$.

ג. הסרטוט המתאים



ע מאי 10 מועד קיץ גבז שאלון 35006



AF חוצה זווית הראש (בניית עזר) במשולש שווה שוקיים.
לכן ההמשך שלו יהיה גובה לבסיס,

ועקב שצלעות המלבן מקבילות זו לזו, הרי ש- $AF \perp DG$.

בהתאם ΔADG שווה שוקיים, ולכן $DF = GF$.

גם $SBDE = SDAF = 0.5a$ ולכן $DE \parallel AF$.

נסמן $DE = x$ ולכן $DF = x$, $DG = 2DE = 2x$.

(זווית היקפית שווה לחצי הקשת עליה היא נשענת)

תשובה: $SBAC = 60^\circ$

ΔADF

$$\sin 0.5a = \frac{DF}{AD} \rightarrow AD = \frac{x}{\sin 0.5a}$$

ΔBDE

$$\cos 0.5a = \frac{DE}{BD} \rightarrow BD = \frac{x}{\cos 0.5a}$$

$$AB = \frac{x}{\sin 0.5a} + \frac{x}{\cos 0.5a}$$

$$AB = \frac{x \cos 0.5a + x \sin 0.5a}{\sin 0.5a \cos 0.5a}$$

$$AB = \frac{x(\cos 0.5a + \sin 0.5a)}{0.5 \sin a}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left(\frac{x(\cos 0.5a + \sin 0.5a)}{0.5 \sin a} \right)^2 \sin a$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 (\cos^2 0.5a + 2 \cos 0.5a \sin 0.5a + \sin^2 0.5a)}{0.25 \sin^2 a} \cdot \sin a$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{x^2 (1 + \sin a)}{0.5 \sin a}$$

נמצא עבור אילו ערכי a שטח המלבן DEFG הוא $\frac{3}{8}$ משטח המשולש ABC.

$$2x^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^2 (1 + \sin a)}{0.5 \sin a} \quad /: x^2 \neq 0$$

$$8 \sin a = 3 + 3 \sin a$$

$$5 \sin a = 3$$

$$\sin a = 0.6$$

$$a = 36.87^\circ, \quad a = 143.13^\circ$$

תשובה: $a = 36.87^\circ, \quad a = 143.13^\circ$