נוסחת הגידול והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot a^t$, **כאשר** M_0 **- הכמות ההתחלתית**

a **הוא גורם הגידול,** M_t **הכמות לאחר זמן** t **.**

א. (1) ראובן לקח מהבנק הלוואה של N **שקלים, בריבית של** 8% **לשנה,**

נשתמש בנוסחה $a = 1 \pm \frac{P}{100}$**, כאשר** P **מייצג את אחוז הריבית השנתי במקרה זה.**

$$a = 1 + \frac{8}{100}$$
$$a = 1.08$$

כעבור 3 **שנים הוא שילם לבנק תשלום ראשון של** $42{,}985.6$ **שקלים.**

$$M_t = \mathrm{N} \cdot 1.08^3 = 1.259712\mathrm{N}$$

תשובה: יתרת החוב לאחר שראובן שילם לבנק את התשלום הראשון היא $1.259712\mathrm{N} - 42{,}985.6$ **שקלים.**

(2) יתרת החוב המשיכה לשאת אותה ריבית, וכעבור שנתיים היא הסתכמה ב- $23{,}328$ **שקלים.**

$$(1.259712\mathrm{N} - 42{,}985.6) \cdot 1.08^2 = 23{,}328 \quad / : 1.08^2$$
$$1.259712\mathrm{N} - 42{,}985.6 = 20{,}000$$
$$1.259712\mathrm{N} = 62{,}985.6 \quad / : 1.259712$$
$$\boxed{\mathrm{N} = 50{,}000}$$

תשובה: סכום ההלוואה שראובן לקח מהבנק הוא $50{,}000$ **שקלים.**

ב. נבדוק מתי היה החוב לבנק גדול פי 2 **מסכום ההלוואה שלקח אם לא היה ראובן מחזיר חלק ממנה.**

כלומר, מתי היה החוב מגיע ל- $100{,}000$ **שקלים** $= 50{,}000 \cdot 2$ **.**

$$100{,}000 = 50{,}000 \cdot 1.08^t \quad / : 50{,}000$$
$$2 = 1.08^t$$
$$\ln 2 = \ln 1.08^t$$
$$\ln 2 = t \ln 1.08$$
$$\frac{\ln 2}{\ln 1.08} = t$$
$$\boxed{t = 9.006}$$

תשובה: כעבור 9 **שנים בערך היה החוב לבנק גדול פי** 2 **מסכום ההלוואה.**

א. נגזור את הפונקציה $f(x)=x\ln x$

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x} \quad \leftarrow (uv)'=u'v+uv'$$

$$\boxed{f'(x)=\ln x+1}$$

תשובה: $f'(x)=\ln x+1$

ב. (1) $f'(x)=\ln x+1$ **היא פונקציה עולה, כיוון ש** $\ln x$ **פונקציה עולה (או אפשר ע"י** $x>0 \leftarrow f''(x)=\frac{1}{x}>0$ **)**

$f(x)=x\ln x$ **היא פונקציה בעלת נקודת מינימום, בנקודה** $x=\frac{1}{e}$

$$\ln x+1=0 \quad \to \ln x=-1 \quad \to x=e^{-1}=\frac{1}{e},\ f''(x)=\frac{1}{x}>0 \quad \to Min$$

תשובה: גרף I **מתאים לפונקציה** $f(x)$.

(2) הראינו ש- $f(x)=x\ln x$ **היא פונקציה בעלת נקודת מינימום, בנקודה** $x=\frac{1}{e}$.

תשובה: עלייה: $x>\frac{1}{e}$, **ירידה** $0<x<\frac{1}{e}$.

ג. כפי שהראינו $f'(x)=\ln x+1$ **חותכת את ציר ה-** x **, בנקודה שבה** $x=\frac{1}{e}$.

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}(f'(x)-0)dx$$

$$S=f(x)\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

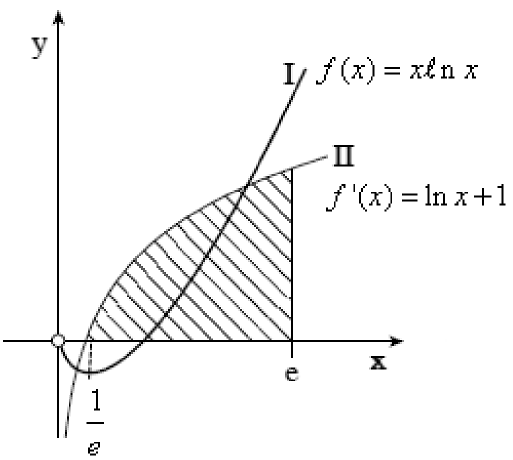
$$S=f(e)-f(\frac{1}{e})$$

$$S=e\ln e-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}$$

$$S=e-\frac{1}{e}(-1)$$

$$\boxed{S=e+\frac{1}{e}}$$

תשובה: גודל השטח המקווקו הוא $e+\frac{1}{e}$.



פונקציה עליונה	$f'(x)=\ln x+1$
פונקציה תחתונה	$y=0$
x **גדול**	$x=e$
x **קטן**	$x=\frac{1}{e}$

נתונה הפונקציה $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$

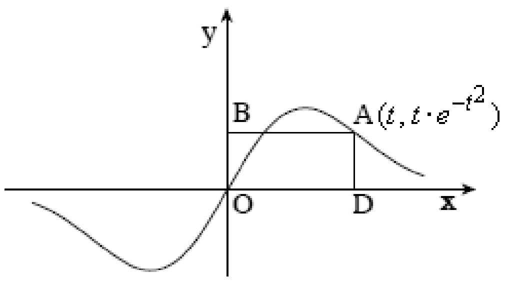
הפונקציה שיש להביא ***למקסימום*** **היא** ***שטח המלבן*** ABOD **.**

הנקודה A **נמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$ **ולכן נסמנה** $A(t,t\cdot e^{-t^2})$ **.**

כיוון שנתון שהצורה המתקבלת היא מלבן, והזווית בין הצירים היא ישרה,

הרי שגם הצלעות המחברות את הנקודה $A(t,t\cdot e^{-t^2})$ **לצירים מאונכות אליהם,**

ובהתאם מימדי המלבן הם: t **ו-** $t\cdot e^{-t^2}$ **.**



$$s(t)=t\cdot t\cdot e^{-t^2}$$

$$\boxed{s(t)=t^2e^{-t^2}}$$

$$s'(t)=2te^{-t^2}-2t^3e^{-t^2}$$

$$\boxed{s'(t)=2te^{-t^2}(1-t^2)}$$

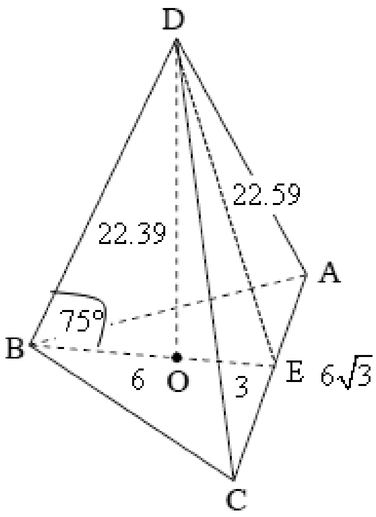
$$0=1-t^2 \qquad 2te^{-t^2}>0 \quad \leftarrow t>0, \quad e^{-t^2}>0$$

$$\boxed{t=1} \leftarrow t>0$$

$$\left.\begin{array}{l} s'(0.9)=+\cdot(1-0.9^2)=+\cdot 0.19>0 \\ s'(1.1)=+\cdot(1-1.1^2)=+\cdot(-0.21)<0 \end{array}\right\} x=1, \max$$

ובהתאם שיעורי הנקודה $\boxed{A(1,\frac{1}{e})} \rightarrow A(1,1\cdot e^{-1^2})$

תשובה: $A(1,\frac{1}{e})$ **, עבורו שטח המלבן** ABOD **מקסימלי.**



א. הבסיס ABC **הוא משולש שווה צלעות, שכל זוויותיו** $60°$ **.**

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC **הוא** 6 **ס"מ.**

על פי משפט הסינוסים:

$$\underline{\Delta ABC}$$

$$\frac{AC}{\sin \measuredangle ABC} = 2R$$

$$AC = 2 \cdot 6 \cdot \sin 60°$$

$$AC = 6\sqrt{3} \quad \leftarrow \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

תשובה: אורך צלע הבסיס הוא $6\sqrt{3}$ **ס"מ.**

ב. במשולש שווה צלעות, מרכז המעגל החוסם הוא גם מפגש תיכונים .

התיכונים חותכים זה את זה ביחס של $2:1$ **מהקדקוד.**

OB **הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש, ולכן** $OE = OB:2 = 6:2 = 3$

BE **תיכון במישור הבסיס, ולכן** OE **התיכון בפאה** CDA **שהיא משולש שווה שוקיים הוא גם הגובה שלה.**

$\measuredangle OBD = 75°$ **כי היא הזווית שבין המקצוע הצדדי** OD **להיטל שלו על הבסיס** OB **.**

$$\underline{\Delta BOD}$$

$$\tan \measuredangle OBD = \frac{DO}{BO}$$

$$\tan 75° = \frac{DO}{6}$$

$$DO = 6 \cdot \tan 75°$$

$DO =$ **ס"מ** 22.39

על פי משפט פיתגורס

$$\underline{\Delta ODE}$$

$$(OD)^2 + (OE)^2 = (DE)^2$$

$$22.39^2 + 3^2 = (DE)^2$$

$DE =$ **ס"מ** 22.59

נמצא את השטח של פאה צדדית של הפירמידה.

$\underline{\Delta CDE}$

$$S_{\Delta CDE} = \frac{AC \cdot DE}{2}$$

$$S_{\Delta CDE} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 22.59}{2}$$

$$S_{\Delta CDE} = 117.38$$

תשובה: השטח של פאה צדדית של הפירמידה הוא 117.38 **סמ"ר.**