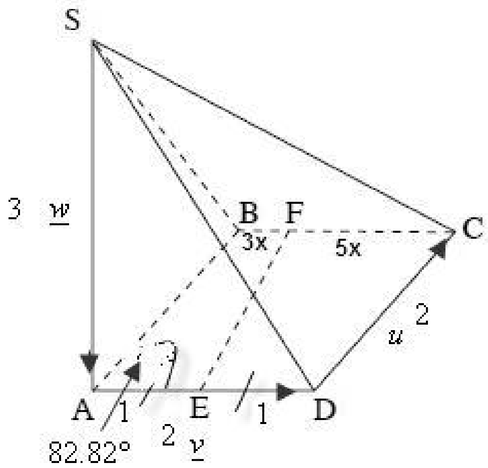


א. נמצא את נפח הפירמידה $SABCD$.

בסיס הפירמידה מעוין, שכל צלעותיו שוות זו לזו.

על פי נתוני התרגיל וכפי שיוכח בהמשך:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}} \quad |\underline{u}|=2 \quad \underline{u}^2=4$$

$$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}} \quad |\underline{v}|=2 \quad \underline{v}^2=4$$

$$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}} \quad |\underline{w}|=3 \quad \underline{w}^2=9$$

$$\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0, \quad \underline{u}\cdot\underline{v}=2$$

הנקודה F **מחלקת את הצלע** BC**,**

ביחס של $BF:FC=3:5$**, לכן:**

$$\overrightarrow{BF}=\frac{3}{8}\overrightarrow{BC} \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{BF}=\frac{3}{8}\underline{v}}$$

הנקודה E **היא אמצע הצלע** AD **ולכן :**

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\underline{v}}$$

$\overrightarrow{SA}$ **מאונך למישור הבסיס, לכן:** $\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$

$\overrightarrow{SD}\perp\overrightarrow{EF}$**, ובהתאם:** $\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{EF}=0$

$$\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD} \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{SD}=\underline{w}+\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$$

$$\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{u}+\frac{3}{8}\underline{v}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EF}=\underline{u}-\frac{1}{8}\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{EF}=0$$

$$(\underline{u}-\frac{1}{8}\underline{v})(\underline{w}+\underline{v})=0$$

$$\underline{u}\underline{v}-\frac{1}{8}\underline{v}^2=0 \quad \leftarrow \underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$$

$$\boxed{\underline{u}\underline{v}=\frac{1}{2}} \quad \leftarrow \underline{v}^2=4$$

$$\underline{u}\underline{v}=|\underline{u}||\underline{v}|\cos \mathbf{S}\mathrm{BAD}$$

$$\frac{1}{2}=2\cdot 2\cos \mathbf{S}\mathrm{BAD}$$

$$\cos \mathbf{S}\mathrm{BAD}=\frac{1}{8} \quad \rightarrow \boxed{\mathbf{S}\mathrm{BAD}=82.82^\circ}$$

שטח בסיס הפירמידה SABCD **:**

$$S_{\mathrm{ABCD}}=|\underline{u}||\underline{v}|\sin \mathbf{S}\mathrm{BAD}$$
$$S_{\mathrm{ABCD}}=2\cdot 2\sin 82.82^\circ$$
$$\boxed{S_{\mathrm{ABCD}}=3.97}$$

נפח הפירמידה SABCD**:**

$$V_{\mathrm{SABCD}}=\frac{S_{\mathrm{ABCD}}\cdot|\underline{w}|}{3}$$
$$V_{\mathrm{SABCD}}=\frac{3.97\cdot 3}{3}$$
$$\boxed{V_{\mathrm{SABCD}}=3.97}$$

תשובה: נפח הפירמידה SABCD **הוא** 3.97 **יח"ק.**

ב. (1) נמצא את נפח הפירמידה המשולשת SEDC**.**

כיוון שהנקודה E **היא אמצע הצלע** AD **, הרי ש:** $S_{\mathrm{EDC}}=\frac{1}{4}S_{\mathrm{ABCD}}$

SA **הוא גובה משותף לפירמידה** SEDC **ולפירמידה** SABCD**.**

$$V_{\mathrm{SEDC}}=\frac{1}{4}V_{\mathrm{SABCD}}$$
$$V_{\mathrm{SEDC}}=\frac{3.97}{4}$$
$$\boxed{V_{\mathrm{SEDC}}=0.992}$$

תשובה: נפח הפירמידה המשולשת SEDC 0.992 **יח"ק.**

(2) מרחק הקדקוד C **מהמישור , הוא אורך הגובה מקדקוד** C **למישור המשולש** SED **בפירמידה** SEDC**.**

נכתב ע"י עפר ילין

הראינו כי נפח הפירמידה המשולשת SEDC 0.992 **יח"ק.**

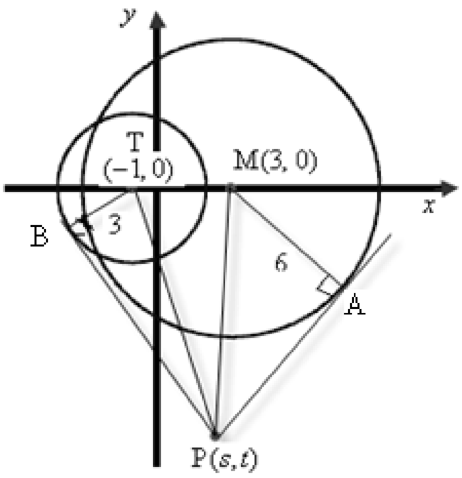
שטח בסיס הפירמידה SAD **:** $S_{SED} = \frac{|\underline{w}|\left|\overrightarrow{ED}\right|}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1.5$

$$0.992 = \frac{1.5h_C}{3}$$

$$\boxed{1.984 = h_C}$$

תשובה: מרחק הקדקוד C **מהמישור** SED **הוא** 1.984**.**

א. נמצא את מרכזי המעגלים ואת הרדיוסים.



$$x^2+y^2-6x-27-0$$
$$(x-3)^2+y^2-27=9$$
$$(x-3)^2+y^2=36 \quad \rightarrow \mathrm{M}(3,0),\ R=6$$
$$x^2+y^2+2x-8=0$$
$$(x+1^2+y^2-8=1$$
$$(x+1)^2+y^2=9 \quad \rightarrow \mathrm{T}(-1,0),\ R=3$$

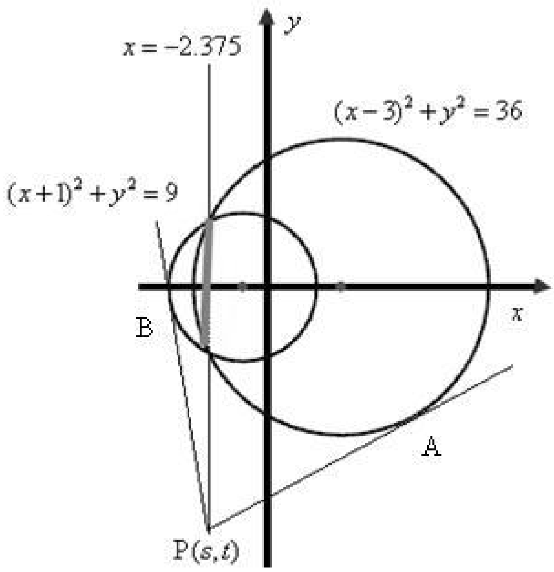
נסמן $\mathrm{P}(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי,**

כאשר $\mathrm{AB},\ \mathrm{BP}$ **משיקים למעגלים.**

על פי הנתון $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ **.**

כיוון שרדיוס המעגל מאונך למשיק בנקודת ההשקה,

הרי שעל פי משפט פיתגורס:



$$\sqrt{(s-3)^2+(t-0)^2-6^2}=\sqrt{(s+1)^2+(t-0)^2-3^2}$$
$$s^2-6s+9+t^2-36=s^2+2s+1+t^2-9$$
$$-8s=19$$
$$s=-2.375$$
$$\boxed{x=-2.375}$$

נשים לב שכיוון שהעלינו בריבוע את שני אגפי המשוואה,

ייתכן ונכנסו פתרונות זרים.

נשים לב שהישר $x=-2.375$ **הוא המיתר המשותף לשני המעגלינ**

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{I.} & x^2+y^2-6x-27=0\\ \mathrm{II.} & x^2+y^2+2x-8=0\end{array}\right\}-8x-19=0 \quad \rightarrow x=-2.375$$

תשובה: המקום הגיאומטרי מונח על הישר $x=-2.375$ **.**

ב. נבדוק עבור אילו ערכי y **הנקודות** $(-2.375, y)$ **נמצאות על המיתר המשותף.**

כלומר, עבור $-2.666 \le y \le 2.666$ **הקטע על הישר** $x=2.375$ **נמצא בתוך המעגל הימני.**

$$(-2.375-3)^2+y^2=36$$
$$y^2=7.109$$

כלומר, עבור $-2.666 \le y \le 2.666$ **הקטע על הישר** $x=2.375$ **הוא המיתר המשותף,**

ואורכו $2\cdot 2.666=5.333$ **.**

תשובה: אורך הקטע 5.333 **יח'.**

נכתב ע"י עפר ילין

א. z_1 **ו-** z_2 **הם שורשי המשוואה** $z+\frac{1}{z}=1$ **. נסמן** $z=a+bi$ **.**

$$z+\frac{1}{z}=1 \quad \to z^2+1=z$$
$$z^2-z+1=0$$
$$z_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$
$$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \leftarrow 1st \quad quadrant$$
$$z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

z_1 **,** z_2 **ו-** z_3 **הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית, שבה** z_1 **הוא האיבר הראשון,**

לכן $d=-\sqrt{3}\,i$ **ובהתאם:** $z_3=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$ **.**

$r=\left|\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{7}>1$ **ו-** z_3 **מחוץ למעגל היחידה** $x^2+y^2=1$

תשובה: z_3 **מחוץ למעגל היחידה.**

ב. נתונה המשוואה $z^2+az+b=0$ **שפתרונותיה הם מספרים מרוכבים (לא ממשיים).**

(1) נוכיח שאם a **ו-** b **הם מספרים ממשיים, אז פתרונות המשוואה הם מספרים צמודים.**

על פי נוסחאות ויאטה: $z_1\cdot z_2=b, \quad z_1+z_2=-a$

נסמן: $z_1=x+yi, \quad z_2=s+ti \quad (y,t\neq 0)$

$$x+yi+s+ti=-a \quad \to I: \quad y+t=0 \quad \to \boxed{y=-t}$$
$$(x+yi)\cdot(s+ti)=b \quad \to xs+xti+syi-yt=b \quad \to I: \quad xt+sy=0$$
$$xt-st=0 \quad \to \boxed{x=s}$$

ולכן פתרונות המשוואה הם מספרים צמודים.

תשובה: הוּכַח.

(2) $z_3=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$ **הוא אחד מפתרונות המשוואה הנתונה בסעיף ב.**

על פי סעיף (1) הפתרון השני הוא : $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i=a \quad a=1$$

$$(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i)(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i)=b \quad \rightarrow b=\frac{1}{4}+\frac{27}{4}=7$$

תשובה: $a=1$ **,** $b=7$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ **,** $a>0$ **, המוגדרת לכל** x **.**

$$f(-x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{-x}{a}}+e^{-\frac{-x}{a}})=\frac{a}{2}(e^{-\frac{x}{a}}+e^{\frac{x}{a}})=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})=f(x)$$

תשובה: הפונקציה זוגית.

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון:

$$f'(x)=\frac{a}{2}(\frac{1}{a}\cdot e^{\frac{x}{a}}-\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{x}{a}})$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})}$$

$$0=e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\quad\to e^{\frac{x}{a}}=e^{-\frac{x}{a}}\quad\to\frac{x}{a}=-\frac{x}{a}$$

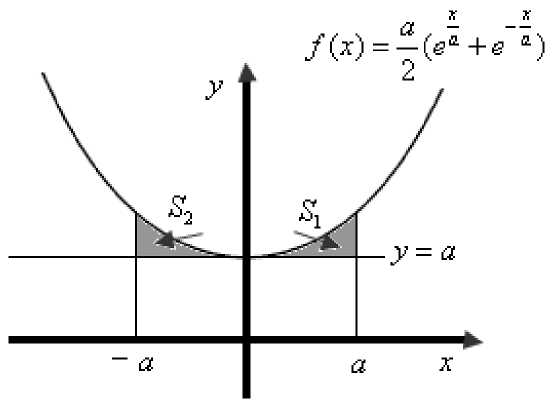
$$x=0\quad\to f(0)=\frac{a}{2}(e^{\frac{0}{a}}+e^{-\frac{0}{a}})=a\quad\to\boxed{(0,a)}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{1}{2a}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})>0}$$

הנגזרת השנייה קעורה כלפי מעלה לכל x **ובהתאם** $(0,a)$ **נקודת מינימום.**

תשובה: $(0,a)$ **נקודת מינימום.**

ג. סרטוט הסקיצה של גרף הפונקציה (כולל סימונים עבור סעיפים ד-ה).



ד. עקב זוגיות הפונקציה שני השטחים המסתובבים זהים בגודלם.

משוואת המשיק בנקודת המינימום היא $y=a$

$$V_1 = p\int_0^a (\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}))^2 dx - p\int_0^a a^2 dx$$

$$V_1 = p\int_0^a \frac{a^2}{4}(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})dx - p\int_0^a a^2\ dx$$

$$V_1 = p\ \frac{a^2}{4}(\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{\frac{-2x}{a}}) - p\,a^2 x\Big]_0^a$$

$$V_1 = p\,((\frac{a^2}{4}(\frac{a}{2}e^{\frac{2a}{a}}+2a-\frac{a}{2}e^{\frac{-2a}{a}}) - \frac{a^2}{4}(\frac{a}{2}e^{\frac{2g0}{a}}+2\cdot 0-\frac{a}{2}e^{\frac{-2g0}{a}})) - (a^2\cdot a - 0))$$

$$V_1 = p\,((\frac{a^3}{8}e^2+\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2}-a^3)$$

$$V_1 = p\,((\frac{a^3}{8}e^2-\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2})$$

ולכן הנפח הכולל הוא $2p\,(\frac{a^3}{8}e^2-\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2})$ **.**

על פי הנתון: $2p\,(\frac{a^3}{8}e^2-\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2}) = 2p\,(e^2-e^{-2}-4)$

$$2p\,(\frac{a^3}{8}e^2-\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2}) = 2p\,(e^2-e^{-2}-4) \quad /:2p$$

$$\frac{a^3}{8}e^2-\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{8}e^{-2} = e^2-e^{-2}-4$$

$$\frac{a^3}{8}(e^2-4-e^{-2}) = e^2-e^{-2}-4 \quad /:e^2-e^{-2}-4\neq 0$$

$$\frac{a^3}{8}=1$$

$$a^3=8$$

$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{b}{2}(e^{\frac{x}{b}}+e^{-\frac{x}{b}})$ **,** $b<0$ **.**

עקב זוגיות הפונקציה, והעובדה כי נפח גוף הסיבוב שנוצר הוא חצי מנפח גוף הסיבוב שבסעיף ד,
הרי ש- $b=-a=-2$ **, כי למעשה השטח המסתובב הפעם הוא רק השטח השמאלי מהסקיצה הקודמת.**
תשובה: $b=-2$ **.**

נבדוק האם הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{\log(\frac{x}{4})}{\log(x-3)}-2$ **חותך את ציר ה-** x **.**

כלומר האם יש פתרון למשוואה $\frac{\log(\frac{x}{4})}{\log(x-3)}-2=0$

$x=4$ **מאפס את מכנה הפונקציה, כאשר** $x>3$ **מבטיח ארגומנטים חיוביים לפונקצית ה-** $\log$

תחום ההגדרה: $x>3, x\neq 4$ **.**

$$\frac{\log(\frac{x}{4})}{\log(x-3)}-2=0$$

$$\frac{\log(\frac{x}{4})}{\log(x-3)}=2$$

$$\log(\frac{x}{4})=2\log(x-3)$$

$$\log(\frac{x}{4})=\log(x-3)^2 \quad \leftarrow b\log_a x=\log_a x^b$$

$$\frac{x}{4}=(x-3)^2$$

$$\frac{x}{4}=x^2-6x+9$$

$$x=4x^2-24x+36$$

$$4x^2-25x+36=0$$

$$x_{1,2}=\frac{25\pm 7}{8}$$

$$\boxed{\cancel{x=4}} \qquad \boxed{\cancel{x=2.25}}$$

שני הפתרונות לא בתחום ההגדרה.

תשובה: הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{\log(\frac{x}{4})}{\log(x-3)}-2$ **<u>אינו</u> חותך את ציר ה-** x **.**

נכתב ע"י עפר ילין

נתונה הפונקציה $f(x)=\log_a(\sin 2x)+b$ **בתחום** $\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{5\pi}{12}$ **,** $a>1$ **.**

בתחום הנתון, $\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{5\pi}{12}$**, מוגדרת פונקציית ה-** $\sin$ **וחיובית ולכן הביטוי** $\log_a(\sin 2x)+b$ **מוגדר בתחום.**

בתחום הנתון הערך הקטן ביותר של הפונקציה הוא 0 **, והערך הגדול ביותר הוא** 1.

בהתאם נחפש מינימום ומקסימום מוחלטים בקטע הסגור.

ערכי נקודות הקצה:

$$\log_a(\sin 2\cdot\frac{\pi}{12})+b=b+\log_a 0.5$$

$$\log_a(\sin 2\cdot\frac{5\pi}{12})+b=b+\log_a 0.5$$

$f(x)=\log_b(\sin 2x)+b$ **- כיוון ש** $a>1$ **הרי ש-** $f(x)$ **עולה כאשר** $\sin 2x$ **עולה ויורדת כאשר** $\sin 2x$ **יורדת.**

$\sin 2x$ **מקבלת ערך מקסימלי** 1 **בתחום עבור** $x=\frac{\pi}{4}$**, כי אז** $\sin 2x=\sin\frac{\pi}{2}=1$ **.**

לכן מקסימום מוחלט של $f(x)=\log_b(\sin 2x)+b$ **הוא** $\log_b(\sin 2\cdot\frac{\pi}{4})+b=\log_b 1+b=b$

נתון כי הערך הגדול ביותר הוא 1**, לכן** $\boxed{b=1}$.

נתון כי הערך הקטן ביותר של הפונקציה הוא 0**, ובמקרה זה הוא מתקבל בקצות תחום ההגדרה הנתון.**

לכן:

$$0=1+\log_a 0.5$$

$$\log_a 0.5=-1$$

$$a^{-1}=0.5$$

$$a^{-1}=2^{-1}$$

$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$ **,** $b=1$