א. נסמן ב- x את מהירות לרוכב האופניים שיצא מ- A (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- y את מהירות לרוכב האופניים שיצא מ- B (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- s את המרחק בין A עד B (ק"מ)

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	**מהירות - v קמ"ש**	**דרך-מרחק - s ק"מ**
מ- A עד מפגש	4	x	$4x$
מ- B עד מפגש	4	y	$4y$
מ- A עד B	$\frac{s}{x}$	x	s
מ- B עד A	$\frac{s}{y}$	y	s

הרוכבים נפגשו לאחר 4 שעות, והמשוואה המתאימה היא $4x+4y=s$

הזמן שנדרש לרוכב מ- A לעבור את כל הדרך

גדול ב- 108 דקות מהזמן שנדרש לרוכב שיצא מ- B והמשוואה המתאימה היא $\frac{s}{x}=\frac{s}{y}+1.8$.

אנו מעוניינים לחשב את היחס $\frac{y}{x}$ **ולכן נציב את** $s=4x+4y$ **במשוואה השנייה.**

נפתור את המשוואה:

$$\frac{4x+4y}{x}=\frac{4x+4y}{y}+1.8$$

$$4+4\cdot\frac{y}{x}=4\cdot\frac{x}{y}+4+1.8 \quad \rightarrow \boxed{\frac{y}{x}=t}$$

$$4t=\frac{4}{t}+1.8 \quad \rightarrow 4t^2-1.8t-4=0$$

$$t_{1,2}=\frac{1.8\pm 8.2}{8}$$

$$\cancel{t_1=-0.8 \quad 0} \quad \leftarrow \frac{y}{x}>0 \quad t_2=1.25 \quad \rightarrow \frac{y}{x}=1.25 \quad o.k.$$

תשובה: היחס הוא 1.25.

ב. זמן הרכיבה של הרוכב שיצא מ- A **הוא** $\frac{s}{x}$ **ושל הרוכב** $\frac{s}{y}$ **שיצא מ-** B**.**

בהתאם נציב $y=1.25x$ **במשוואה השנייה:**

$$\frac{s}{x}=\frac{s}{1.25x}+1.8 \quad \rightarrow 0.2\cdot\frac{s}{x}=1.8 \quad \rightarrow \frac{s}{x}=9$$

$$\frac{s}{y}=9-1.8 \quad \rightarrow \frac{s}{y}=7.2$$

תשובה: הרוכב שיצא מ- A **עבר את הדרך ב-** 9 **שעות והרוכב שיצא מ-** B **עבר את הדרך ב-** 7.2 **שעות.**

א. יש להוכיח כי לכל n **טבעי אי- זוגי, הביטוי** n^3-25n **מתחלק ב-** 24 **בלי שארית,**

ובמילים אחרות כי הביטוי $\frac{n^3-25n}{24}$ **שלם**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$ $\qquad \frac{1^3-25\cdot 1}{24}=\frac{-24}{24}=-1$ **לכן הטענה נכונה עבור** $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי אי-זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{k^3-25k}{24}$ **שלם**

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$**, לכן צ"ל** $\frac{(k+2)^3-25(k+2)}{24}$ **שלם**

$$\Leftrightarrow \frac{k^3+6k^2+12k+8-25k-50}{24}= \quad \leftarrow (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^3-25k}{24}+\frac{6k^2+12k-42}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^3-25k}{24}+\frac{\cancel{6}(k^2+2k-7)}{\cancel{24}\,4}$$

המחובר השמאלי שלם , על-פי הנחת האינדוקציה,

נראה כי $\frac{k^2+2k-7}{4}$ **שלם לכל** k **טבעי אי-זוגי.**

א) נבדוק את נכונות הטענה עבור $k=1$ **:** $\to o.k.$ $\quad \frac{1^2+2\cdot 1-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$

ב) נניח שהטענה נכונה עבור טבעי אי-זוגי כלשהו, כלומר $\frac{t^2+2t-7}{4}$ **שלם**

ג) צ"ל כי $\frac{(t+2)^2+2(t+2)-7}{4}$ **שלם עבור** $k=t+2$,

$$\frac{t^2+4t+4+2t+4-7}{4} \Leftrightarrow \text{שלם}, \quad \Leftrightarrow \frac{t^2+2t-7}{4}+\frac{-\cancel{4}(t-2)}{\cancel{4}}$$

המחובר השמאלי שלם ע"פ הנחת האינדוקציה השנייה, והמחובר הימני שלם כי $t-2$ **שלם**

ד) לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל k **טבעי אי-זוגי, כלומר** $\frac{k^2+2k-7}{4}$ **שלם**

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי אי-זוגי,**

אז היא נכונה עבור $n=k+2$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי אי-זוגי.**

ובהתאם - $\frac{n^3-25n}{24}$ **שלם.**

ב. נתון כי הביטוי $a+b+c+d$ מתחלק ב- 24 בלי שארית.

a, b, c ו- d הם ספרים טבעיים אי-זוגיים.

נוכיח כי גם הביטוי $a^3+b^3+c^3+d^3$ מתחלק ב- 24 בלי שארית.

על פי הטענה שהוכחה בסעיף א, ארבעת המחוברים הבאים שלמים

$\frac{a^3-a}{24}+\frac{b^3-b}{24}+\frac{c^3-c}{24}+\frac{d^3-d}{24}$ כי a, b, c ו- d הם ספרים טבעיים אי-זוגיים.

לכן $\frac{a^3-a+b^3-b+c^3-c+d^3-d}{24}$ שלם

ובהתאם $\frac{a+b+c+d}{24}-\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{24}$ שלם.

כיוון שנתון כי המחובר הימני שלם, הרי שגם המחובר השמאלי שלם.

כלומר $a^3+b^3+c^3+d^3$ מתחלק ב- 24 בלי שארית.

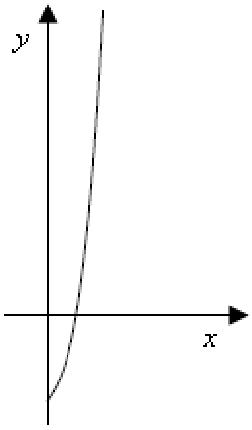
הוּכַח

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2x^4+4x^3+2x^2-8}{x+2} \qquad (x\neq -2)$

חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה,

לכן ניתן לחלק את הפולינומים לפני השרטוט וביצוע האינטגרל.

$$\begin{array}{l} \underline{2x^3+2x-4} \\ 2x^4+4x^3+2x^2-8 \,\big|\, x+2 \\ \underline{2x^4+4x^3} \\ = \quad = \quad 2x^2-8 \\ \qquad\qquad \underline{2x^2+4x} \\ \qquad = \quad -4x-8 \\ \qquad\qquad \underline{-4x-8} \\ \qquad\qquad = \;\; = \end{array}$$



$\underline{-2)}$

$$f(x)=\frac{(x+2)(2x^3+2(x-2))}{x+2}$$
$$f(x)=(2x^3+2x-4),\ x\neq -2$$

לכן ניתן לרשום את הפונקציה בתחום מפוצל

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3+2x-4 & x\neq 2 \\ \varnothing & x=2 \end{cases}$$

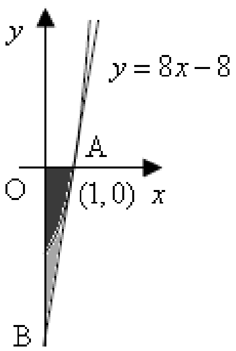
נמצא את משוואת המשיק

נקודת ההשקה $f(1)=2\cdot 1^3=2\cdot 1-4=0=(1,0)$

שיפוע $f'(x)=6x^2+2 \quad \to f'(1)=6\cdot 1^2+2=8$

משוואת המשיק: $y-0=8(x-1) \quad \to \boxed{y=8x-8}$

תשובה: $y=8x-8$



משולש ישר זווית $S_{\Delta AOB}=\dfrac{AO\cdot BO}{2}=\dfrac{1\cdot 8}{2}=4 \quad \leftarrow B(0,-8)$

$$S_{RED}=\int_0^1(0-(2x^3+2x-4))\,dx=\left(\frac{-2x^4}{4}-\frac{2x^2}{2}+4x\right)\Big]_0^1$$

$$=\left(\frac{-2\cdot 1^3}{4}-1^2+4\cdot 1\right)-\left(\frac{-2\cdot 0^3}{4}-0^2+4\cdot 0\right)=2.5$$

ובהתאם: $S_{GREEN}=4-2.5=1.5$

תשובה: 1.5 **יח"ר**

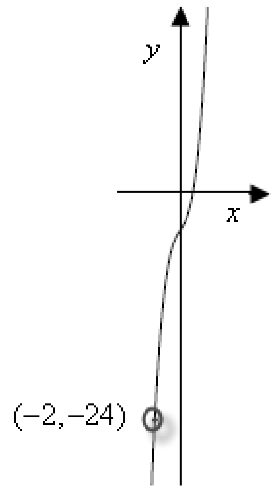
ב. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}2x^3+2x-4 & x\neq 2\\ \varnothing & x=2\end{cases}$

$f'(x)=6x^2+2$ **חיובי עבור** $x\neq 2$ **(שעבורו הפונקציה אינה מוגדרת)**

הפונקציה עולה עבור $x>2$ **או** $x<2$

הפונקציה יורדת – אף x

(2) הסקיצה המתאימה, כאשר נקודת אי הרציפות $(-2,-24)$ $f(2)=2\cdot(-2)^3+2\cdot(-2)-4=-24=(-2,-24)$

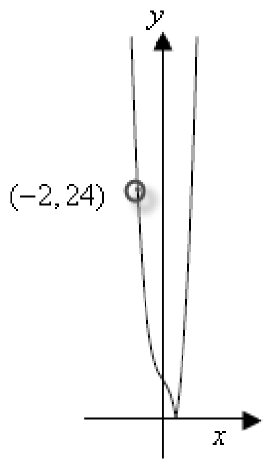


ג. $g(x)=\left|f(x)\right|$ **, ובהתאם ערכי** $g(x)$ **נגדיים לערכי** $f(x)$ **עבור** $x<1$ **שהוא האפס של** $f(x)$

$$g(x)=\begin{cases}2x^3+2x-4 & x\geq 1\\ \varnothing & x=2\\ -2x^3-2x+4 & x<1,\ x\neq -2\end{cases}$$

כאשר נקודת אי הרציפות $(-2,24)$

למעשה, עבור $x<1$ **"מקפלים" את גרף הפונקציה סביב ציר ה-** x



א. נתונה הפונקציה: $f(x)=2-\cos x-\sin^2 x$ **בתחום** $-p \le x \le p$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, כלומר** $f(0)=2-\cos 0-\sin^2 0=1 \quad \to (0,1)$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **,**

אולם כיוון ש- $-1\le \sin x,\cos x\le 1$ **וכאשר** $\cos x=\pm 1 \to \sin^2 x=0$ **הרי** $2-\cos x-\sin^2 x$ **לא יתאפס לעולם.**

תשובה: $(0,1)$

ב. נמצא את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור:

$$f(-p)=2-\cos(-p)-\sin^2(-p)=3 \quad \to (-p,3), \quad f(p)=2-\cos p-\sin^2 p=3 \quad \to (p,3)$$

$$\boxed{f'(x)=\sin x-2\sin x\cos x}$$

$$0=\sin x-2\sin x\cos x \quad \to 0=\sin x(1-2\cos x)$$

$$\sin x=0 \quad \cos x=0.5$$

$$x=pk \quad x=\frac{p}{3}+2pk \quad x=-\frac{p}{3}+2pk$$

$$k=0 \quad \to x=0$$

$$k=1 \quad \to x=p, \quad x=\frac{p}{3}, \quad x=-\frac{p}{3}$$

$$k=-1 \quad \to x=-p$$

$$f(\frac{p}{3})=2-\cos\frac{p}{3}-\sin^2\frac{p}{3}=0.75 \quad \to (\frac{p}{3},0.75), \quad f(-\frac{p}{3})=2-\cos(-\frac{p}{3})-\sin^2(-\frac{p}{3})=0.75 \quad \to (-\frac{p}{3},0.75)$$

נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה ונזהה את הקיצון המוחלט.

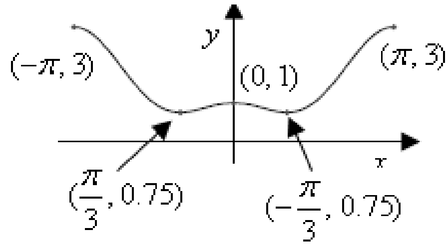
לצורך סעיף ג' נסמן גם את סימני הנגזרת, ונרשום את ערכיה בנקודות הקצה (נמצאו במהלך סעיף זה)

x	p		$\frac{p}{3}$		$-\frac{p}{3}$		$-\frac{p}{3}$		$-p$
$f(x)$	3		0.75		1		0.75		3
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0
מסקנה	**Max**	↗	**Min**	↘	**Max**	↗	**Min**	↘	**Max**

תשובה: $(p,3)$ **,** $(-p,3)$ **מקסימום מוחלט ,** $(-\frac{p}{3},0.75)$ **,** $(\frac{p}{3},0.75)$ **מינימום מוחלט**

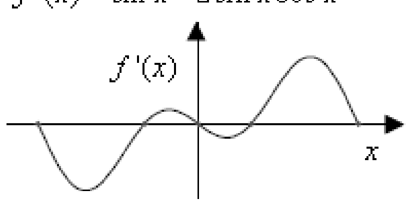
ג. (1) נצייר סקיצה מתאימה של הפונקציה

$f(x)=2-\cos x-\sin^2 x$



(2) נצייר סקיצה מתאימה של נגזרת הפונקציה

$f'(x)=\sin x-2\sin x\cos x$



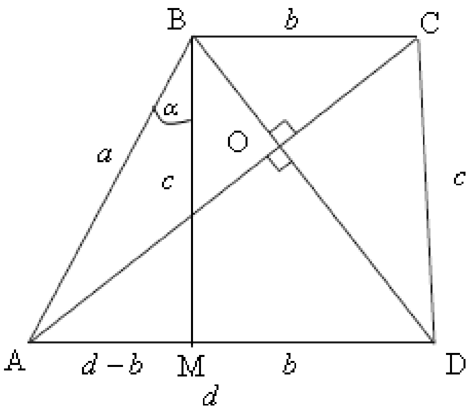
ד. רק אם נעשה הסטה אנכית של 1 **יחידות, גרף הפונקציה ישיק לציר ה-** x **פעם אחת בלבד,**

במקרה זה נקבל את הפונקציה $y=1-\cos x-\sin^2 x$ **ובהתאם** $\boxed{a=1}$

תשובה: $a=1$

5

א. נעלה את השרטוט המעודכן, כולל לסעיף ב, והסברים בהתאם:



$ABCD$ **טרפז,** $AD \parallel BC$ **(נתון)**

$BM \parallel CD$ **(נתון)**

$DCBM$ **מקבילית (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות)**

$BM = CD = c$ **(צלעות נגדיות שוות במקבילית)**

$MD = BC = b$ **(צלעות נגדיות שוות במקבילית)**

$AM = d - b$ **(הפרש קטעים)**

ניעזר במשפט פיתגורס בארבעה משולשים

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\Delta AOB}: \quad a^2 = BO^2 + AO^2 \\ \underline{\Delta COD}: \quad c^2 = CO^2 + DO^2\end{array}\right\} a^2 + c^2 = BO^2 + AO^2 + CO^2 + DO^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\Delta BOC}: \quad b^2 = BO^2 + CO^2 \\ \underline{\Delta AOD}: \quad d^2 = AO^2 + DO^2\end{array}\right\} b^2 + d^2 = BO^2 + AO^2 + CO^2 + DO^2$$

ועל פי כלל המעבר $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

הוּכַח

ב. נשתמש במשפט הקוסינוסים

$$\underline{\Delta BAM}: \quad AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos\angle ABM$$

$$(d-b)^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$d^2 - 2bd + b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha$$

$$-2bd = -2ac \cdot \cos\alpha \quad \leftarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{bd}{ac}}$$

הוּכַח

ג. (1) נמצא את שטח המשולש ABM

$$S_{\Delta ABM}=\frac{AB\cdot MB\cdot\sin\angle ABM}{2}=\frac{ac\sin a}{2}=\frac{\frac{bd}{\cos a}\sin a}{2}=\boxed{\frac{bd\tan a}{2}}$$

(2) נמצא את שטח הטרפז ABCD :

משפט סינוסים: $\underline{\Delta BAM}:\quad \frac{a}{\sin\angle BAM}=\frac{d-b}{\sin a}\quad\rightarrow\sin\angle BAM=\frac{a\sin a}{d-b}\quad\rightarrow\sin\angle BMD=\frac{a\sin a}{d-b}$

$$S_{ABCD}=\frac{bd\tan a}{2}+bc\cdot\frac{a\sin a}{d-b}=\frac{bd\tan a}{2}+b\cdot\frac{\sin a}{d-b}\cdot\frac{bd}{\cos a}=\frac{bd\tan a\,(d-b+2b)}{2(d-b)}=\boxed{\frac{bd\tan a\,(d+b)}{2(d-b)}}$$