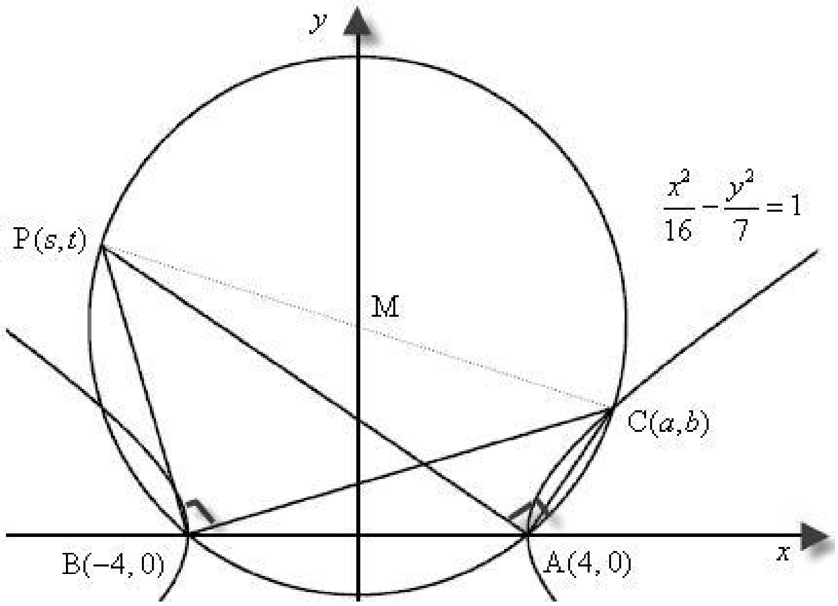
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



משוואת ההיפרבולה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{7}=1$ **ועבור** $y=0$ **נקבל את שיעורי הקדקודים:** $A(4,0), B(-4,0)$.

$C(a,b)$ **היא נקודה על ההיפרבולה,**

כאשר $P(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי, היא נקודת החיתוך של האנכים** BP **ו-** AP

על פי הנתונים שני הקדקודים רואים את הישר CP **בזווית ראייה של** $90°$**,**

ולכן CP **הוא קוטר מעגל שעובר בנקודות** A, B, C, P .

MO **הוא אנך אמצעי למיתר** AB **ובהתאם שיעור ה-** x **של מרכז המעגל הוא** 0**,**

ולכן $x_C=-x_P=-t$ **ומרכז המעגל** $M(0,\frac{b+t}{2})$**.**

רדיוס המעגל $R=MA=\sqrt{(0-4)^2+(\frac{b+t}{2}-0)^2}$

ומשוואת המעגל $x^2+(y-\frac{b+t}{2})^2=16+(\frac{b+t}{2})^2$ **, או שניתן לרשום** $x^2+y^2-(b+t)y=16$

נציב $C(a,b)$ **ונקבל** $a^2+b^2-b(b+t)=16$

$$a^2-bt=16$$

$$\frac{a^2-16}{t}=b$$

$$\frac{(a^2-16)^2}{t^2}=b^2$$

כמו כן $C(a,b)$ **על ההיפרבולה** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{7}=1$ **ולכן** $\frac{a^2}{16}-1=\frac{b^2}{7} \rightarrow \frac{a^2}{16}-\frac{b^2}{7}=1$ **.**

$$\frac{7(a^2-16)}{16}=b^2$$

$$\frac{7(a^2-16)}{16}=\frac{(a^2-16)^2}{t^2} \quad / :(a^2-16)\neq 0$$

נתון כי נקודה C **נמצאת על ההיפרבולה, אך לא על ציר ה-** x **, ובהתאם** $a\neq \pm 4$

$$\frac{7}{16}=\frac{a^2-16}{t^2}$$

$$7t^2=16a^2-256$$

$$7t^2=16s^2-256 \quad \leftarrow x_C=-x_P=-t$$

$$\boxed{16x^2-7y^2=256}$$

תשובה: $16x^2-7y^2=256$**, למעט הנקודות** $(4,0),(-4,0)$

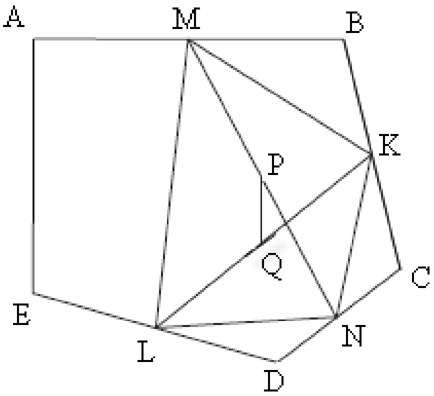
ב. $16x^2-7y^2=256$ **היא היפרבולה**

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{(\frac{7}{256})}=1$ **, כאשר** $a=4, b=\frac{\sqrt{7}}{16}$ **.**

והמקום הגיאומטרי שקבלנו הוא אוסף כל הנקודות שעל ההיפרבולה,

למעט נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x **(** $(4,0),(-4,0)$ **)**

א. נתון כי P **אמצע האלכסון** NM **, ו-** Q **אמצע האלכסון** KL



ובהתאם: $\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{QL}=0 \rightarrow \quad \overrightarrow{LQ}=\overrightarrow{QK}$ **,**

$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}=0 \rightarrow \quad \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$

$$+\begin{cases}\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MP}\\ \overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QL}+\overrightarrow{LN}+\overrightarrow{NP}\end{cases}$$

$$2\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{LN}$$

$$\boxed{\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{LN})}$$

הוכַח.

ב. MK **קטע אמצעים ב-** ΔABC **ובהתאם:** $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

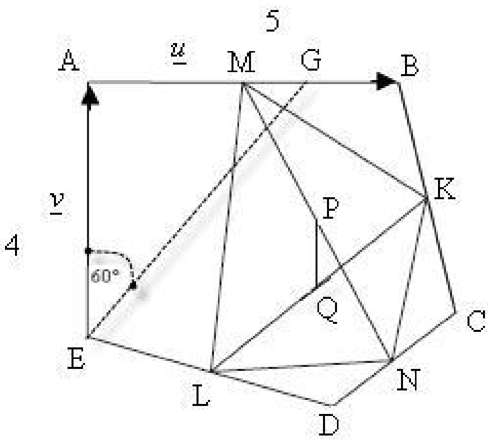
LN **קטע אמצעים ב-** ΔECD **ובהתאם:** $\overrightarrow{LN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$ **,**

$$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{EA}=2\overrightarrow{LN}+2\overrightarrow{KM}$$
$$\overrightarrow{EA}=2(\overrightarrow{LN}+\overrightarrow{KM})$$
$$\overrightarrow{EA}=4\overrightarrow{QP}$$

ולכן:: $\overrightarrow{QP} \parallel \overrightarrow{EA}$ **,** $|\overrightarrow{QP}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{EA}|$**.**

הוכַח.

ג. נתון: $\overrightarrow{AG}=t\underline{u}$ $\quad t>0$ **(** G **על** AB **או אחרי** B**),** $\overrightarrow{QP}\perp\overrightarrow{AB}$ **,** $|\underline{u}|=5$ **,** $|\underline{v}|=4$



$\overrightarrow{QP} \parallel \overrightarrow{EA}$ **ולכן הזווית המבוקשת שווה לזווית** $\angle AEG$

$\overrightarrow{QP}\perp\overrightarrow{AB}$ **ובהתאם** $\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{AB}$ **ולכן** $\underline{u}\,\underline{v}=0$

$|\underline{u}|=5 \quad \rightarrow \underline{u}\cdot\underline{u}=|\underline{u}|^2=25$ **,** $|\underline{v}|=4 \quad \rightarrow \underline{v}\cdot\underline{v}=|\underline{v}|^2=16$ **.**

$$\cos 60° = \frac{\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EA}}{\left|\overrightarrow{EG}\right|\left|\overrightarrow{EA}\right|}$$

$$0.5 = \frac{(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AG})\cdot\overrightarrow{EA}}{\left|\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AG}\right|\left|\overrightarrow{EA}\right|} \quad \rightarrow 0.5 = \frac{(\underline{v}+t\underline{u}\,)\,\underline{v}}{\left|\underline{v}+t\underline{u}\right|\left|\underline{v}\right|}$$

$$0.5 = \frac{\underline{v}\cdot\underline{v}+\underline{u}\,\underline{v}}{\sqrt{\left|\underline{v}\right|^2+2t\underline{u}\underline{v}+t^2\left|\underline{u}\right|^2}\cdot\left|\underline{v}\right|} \quad \rightarrow 0.5 = \frac{16+0}{\sqrt{16+0+25t^2}\cdot 4}$$

$$16+25t^2 = 64 \quad \rightarrow t^2 = 1.92 \quad \rightarrow \boxed{t = 1.386} \quad \leftarrow t > 0$$

תשובה: $t = 1.386$

א. נתונים שני ישרים l **ו-** l' **:** $l: (0, 0, 2) + t(1, 1, 0)$

$l': (0, 0, -2) + s(1, -1, 0)$

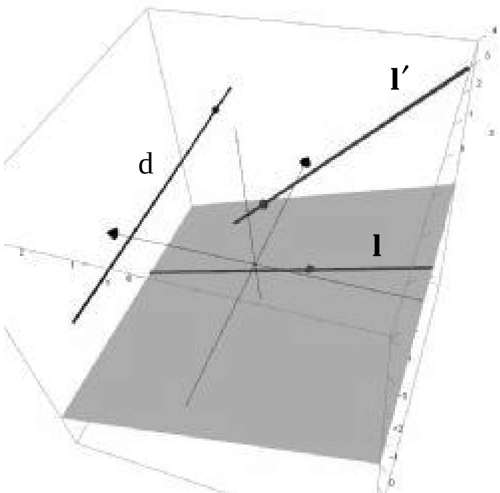
לא קיים סקלר c **עבורו** $(1, 1, 0) = c(1, -1, 0)$ **ולכן הישרים נחתכים או מצטלבים.**

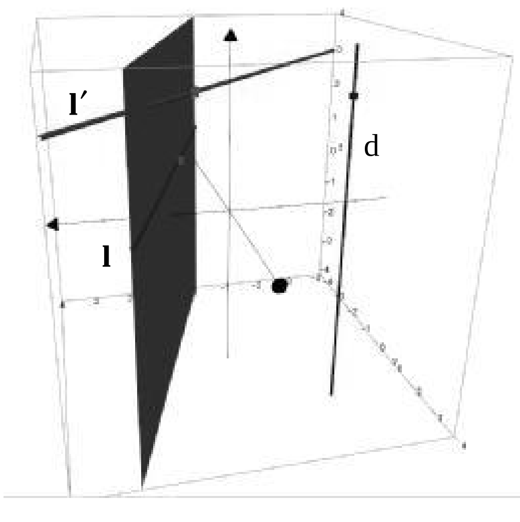
נקודה טיפוסית על l **:** $(t, t, 2)$ **ו- נקודה טיפוסית על** l' **:** $(s, -s, -2)$

ומכיוון ששיעורי ה- z **, הקבועים, סותרים זה את זה הרי שהישרים מצטלבים.**

תשובה: הישרים מצטלבים.

נמחיש משתי זוויות שונות את המצב ההדדי של המישור והווקטורים המשתתפים בתרגיל





ב. נתון כי ישר $\underline{d}=(a,b,c)$ **מאונך לישר** l **ולישר** l'.

$$\left.\begin{aligned}(a,b,c)\,(1,1,0)=0 \quad &\rightarrow a+b=0\\ (a,b,c)\,(1,-1,0)=0 \quad &\rightarrow a+b=0\end{aligned}\right\} a=b=0 \quad \rightarrow \underline{d}=(0,0,1)$$

והווקטור $\underline{d}$ **מקביל לציר ה-** z **ומכאן שהצגה פרמטרית של המישור היא:**

$$p\ :(0,0,2)+t(1,1,0)+q(0,0,1)$$

נמצא את משוואת המישור

$$\left.\begin{aligned}(a,b,c)\,(1,1,0)=0 \quad &\rightarrow a+b=0\\ (a,b,c)\,(0,0,1)=0 \quad &\rightarrow c=0\end{aligned}\right\} a=-b$$

$$p\ :x-y+d=0$$

נציב את שיעורי הנקודה $(0,\,0,\,2)$

$$0-0+d=0 \rightarrow d=0$$

$$\boxed{p\ :x-y=0}$$

תשובה: $x-y=0$

ג. אוסף הנקודות $(x,1,z)$ **יוצרות מישור שמשוואתו** $y=1$

הישר l **חותך את המישור בנקודה** A **ומכאן ש:** $t=1$ **ושיעורי הנקודה** $\mathrm{A}(1,1,2)$ **.**

הישר l' **חותך את המישור בנקודה** B **ומכאן ש:** $s=-1$ **ושיעורי הנקודה** $\mathrm{B}(-1,1,-2)$ **.**

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\underline{\mathrm{B}}-\underline{\mathrm{A}}=\underline{x}=(-2,0,-4)$$

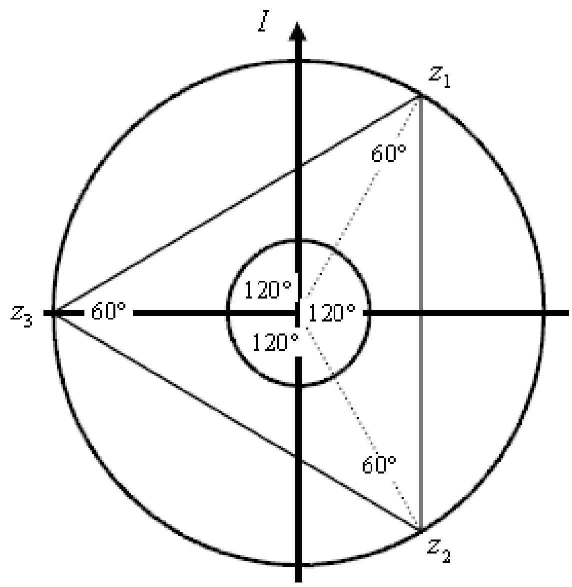
$$\cos a=\frac{|(-2,0,-4)\,(1,1,0)|}{|(-2,0,-4)|\,|(1,1,0)|}$$

$$\cos a=\frac{|-2+0+0|}{\sqrt{4+0+16}\sqrt{1+0+1}}=\frac{2}{\sqrt{20}\sqrt{2}}$$

$$\boxed{a=71.65^\circ}$$

תשובה: 71.65°

נעלה ציור המתאים לשני הסעיפים



המספרים המרוכבים z_1, z_2, z_3 **הם קדקודים של משולש שווה צלעות, הנמצאים על מעגל שמרכזו בראשית הצירים**

א. זוויות המשולש שוות $60°$ **ובהתאם כל זווית מרכזית בת** $120°$**.**

נסמן $z_1 = r\, cis\, q$ **, כלומר:** $z_1 = r\cos q + i\sin q$

לכן: $z_3 = r\, cis\,(q+120°)$ **ובהתאם:** $z_3 = r\cos(q+120°) + i\sin(q+120°)$

וגם: $z_2 = r\, cis\,(q+240°)$ **ובהתאם:** $z_2 = r\cos(q+240°) + i\sin(q+240°)$

$$\begin{aligned}
&z_1 + z_2 + z_3 = \\
&= r\left[\cos q + i\sin q + r\cos(q+240°) + i\sin(q+240°) + r\cos(q+120°) + i\sin(q+120°)\right] \\
&= r\left[(\cos q + \cos(q+240°) + \cos(q+120°)) + i(\sin q + \sin(q+240°) + \sin(q+120°))\right] \\
&= r\left[(2\cos(q+120°)\cos 120° + \cos(q+120°)) + i(2\sin(q+120°)\cos 120° + \sin(q+120°))\right] \\
&= r\left[(\cos(q+120°)(2\cos 120° + 1) + i(\sin(q+120°)(2\cos 120° + 1)\right] \\
&= r\left[(\cos(q+120°)\cdot 0 + i(\sin(q+120°)\cdot 0\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

הוּכַח

<u>דרך שנייה לפתרון:</u>

מרכז המעגל החוסם, ראשית הצירים $(0,0)$ **, הוא מפגש אנכים אמצעיים,**

וכיוון שזהו משולש שווה צלעות הרי שגם מפגש תיכונים.

על פי נוסחת מרכז הכובד, כאשר $z_i = x_i + iy_i$

$$\left.\begin{aligned} x_O &= \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \rightarrow 0 = x_1+x_2+x_3 \\ y_O &= \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \rightarrow 0 = y_1+y_2+y_3 \end{aligned}\right\} x_1+iy_1+x_2+iy_2+x_3+iy_3 = x_1+x_1+x_3+i(y_1+y_2+y_3)=0$$

<u>דרך שלישית לפתרון:</u>

סכום הווקטורים היוצאים ממרכז המעגל שווה לאפס

ב. $|\bar{z}-z|=6$ **,נסמן:** $z=a+bi$ **כלומר:** $|a-bi-(a+bi)|=6 \quad \rightarrow |-2bi|=6 \quad \rightarrow |-bi|=3$

לכן: כאשר נתון כי z_1 **ברביע הראשון** $y_{z_1}=3 \quad \rightarrow b=\pm 3 \quad \rightarrow b^2=9$ **.**

נתון כי $\arg z_1 = 60°$ **ומכאן ש:** $3=r\sin 60° \quad \rightarrow 3=r\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow r=2\sqrt{3}$

ומכאן ש: $z_1=2\sqrt{3}\,cis(60°)$ **או** $z_1=\sqrt{3}+3i$ **: ו- עבור** z_2 **נקבל ש** $b=-3$ **ומכאן** $z_2=\sqrt{3}-3i$

$z_3=2\sqrt{3}\,cis(60°+120°)=2\sqrt{3}\,cis(180°)$ **או** $z_3=-2\sqrt{3}$

תשובה: $z_1=\sqrt{3}+3i$ **,** $z_2=\sqrt{3}-3i$ **,** $z_3=-2\sqrt{3}$

הסקיצות I **,** II **,** III **שבציור הן הגרפים של הפונקציות** $f(x)=\ln(1+\frac{2}{e^{2x}})$ **,** $g(x)=2e^{-2x}$ **,** $h(x)=\ln(e^x+\frac{2}{e^x})$

א. (1) $f(0)=\ln(1+\frac{2}{e^{2\cdot 0}})=\ln(1+2)\quad\rightarrow\boxed{(0,\ln 3)}$

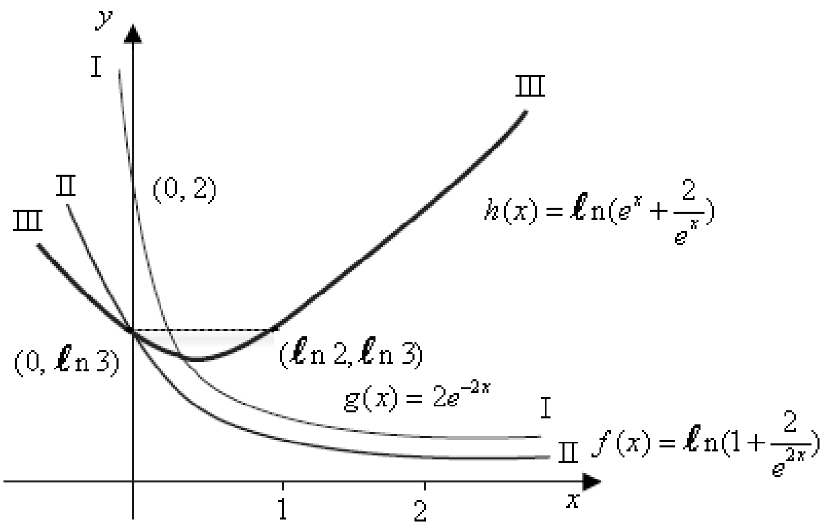
$$g(0)=2e^{-2\cdot 0}=2\quad\rightarrow\boxed{(0,2)}$$

$$h(0)=\ln(e^0+\frac{2}{e^0})=\ln(1+2)\quad\rightarrow\boxed{(0,\ln 3)}$$

תשובה: $f(x)$ **-** $(0,\ln 3)$ **,** $g(x)$ **-** $(0,2)$ **,** $h(x)$ **-** $(0,\ln 3)$

(2) משוואת הישר המקביל לציר ה- x

היא $y=\ln 3$



$$\ln 3=\ln(e^x+\frac{2}{e^x})$$

$$e^x+\frac{2}{e^x}=3$$

$$e^{2x}-3e^x+2=0$$

$$(e^x-1)(e^x-2)=0$$

$$e^x=2\rightarrow\quad\boxed{(\ln 2,\ln 3)}$$

ב.

$$\int_1^2(h(x)-f(x))\,dx=\int_1^2(\ln(e^x+\frac{2}{e^x})-\ln(1+\frac{2}{e^{2x}}))\,dx=$$

$$=\int_1^2(\ln\frac{e^x+\frac{2}{e^x}}{1+\frac{2}{e^{2x}}})\,dx=\int_1^2(\ln\frac{\frac{e^{2x}+2}{e^x}}{\frac{e^{2x}+2}{e^{2x}}})\,dx=\int_1^2(\ln e^x)\,dx=$$

$$\int_1^2(x)\,dx=\frac{x^2}{2}\Big]_1^2=2-0.5=\boxed{1.5}$$

תשובה: 1.5 **יח"ר**

ג. כיוון שבתחום $1\le x\le 2$ **גרף הפונקציה** $f(x)$ **מתחת לגרף הפונקציה** $g(x)$ **,**

הרי ש: $\int_1^2 f(x)\,dx$ **קטן יותר.**

ד. $\int_1^2(g(x)\,dx=\int_1^2(2e^{-2x})\,dx=-e^{-2x}\Big]_1^2=(-e^{-4}+e^{-2})=-\frac{1}{e^4}+\frac{1}{e^2}=\boxed{\frac{e^2-1}{e^4}}$

ועל פי סעיף ג: $\int_1^2 f(x)\,dx<\frac{e^2-1}{e^4}$ **.**