

א. נסמן ב- x את מהירות לרוכב האופניים שיצא מ- A (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- y את מהירות לרוכב האופניים שיצא מ- B (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- s את המרחק בין A עד B (ק"מ)

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ	
4	x	$4x$	מ- A עד מפגש
4	y	$4y$	מ- B עד מפגש
$\frac{s}{x}$	x	s	מ- A עד B
$\frac{s}{y}$	y	s	מ- B עד A

הרוכבים נפגשו לאחר 4 שעות, והמשוואה המתאימה היא $4x + 4y = s$

הזמן שנדרש לרוכב מ- A לעבור את כל הדרך

גדול ב- 108 דקות מהזמן שנדרש לרוכב שיצא מ- B והמשוואה המתאימה היא $\frac{s}{x} = \frac{s}{y} + 1.8$.

אנו מעוניינים לחשב את היחס $\frac{y}{x}$ ולכן נציב את $s = 4x + 4y$ במשוואה השנייה.

נפתור את המשוואה:

$$\frac{4x+4y}{x} = \frac{4x+4y}{y} + 1.8$$

$$4 + 4 \cdot \frac{y}{x} = 4 \cdot \frac{x}{y} + 4 + 1.8 \rightarrow \boxed{\frac{y}{x} = t}$$

$$4t = \frac{4}{t} + 1.8 \rightarrow 4t^2 - 1.8t - 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1.8 \pm 8.2}{8}$$

$$\cancel{t_1 = -0.8} < 0 \leftarrow \frac{y}{x} > 0 \quad t_2 = 1.25 \rightarrow \frac{y}{x} = 1.25 \quad o.k.$$

תשובה: היחס הוא 1.25.

ב. זמן הרכיבה של הרוכב שיצא מ- A הוא $\frac{s}{x}$ ושל הרוכב $\frac{s}{y}$ שיצא מ- B.

בהתאם נציב $y=1.25x$ במשוואה השנייה:

$$\frac{s}{x} = \frac{s}{1.25x} + 1.8 \rightarrow 0.2 \cdot \frac{s}{x} = 1.8 \rightarrow \frac{s}{x} = 9$$

$$\frac{s}{y} = 9 - 1.8 \rightarrow \frac{s}{y} = 7.2$$

תשובה: הרוכב שיצא מ- A עבר את הדרך ב- 9 שעות והרוכב שיצא מ- B עבר את הדרך ב- 7.2 שעות.

א. נרכז את נתוני שתי הסדרות המדוברות בטבלה מתאימה:

a_n	b_n	
$a_1 \neq 0$	$b_1 = 4a_1$	a_1
d	d	d
n	n	n

$$\text{נתון } S_{b_n} = 2S_{a_n}$$

$$\frac{n}{2}(8a_1 + d(n-1)) = \frac{2n}{2}(2a_1 + d(n-1)) \quad /: \frac{n}{2} \neq 0$$

$$8a_1 + d(n-1) = 4a_1 + 2d(n-1)$$

$$4a_1 = d(n-1)$$

$$a_1 = \frac{d(n-1)}{4}$$

$$\text{תשובה: } a_1 = \frac{d(n-1)}{4}$$

ב. נרכז את נתוני שתי הסדרות המדוברות בטבלה מתאימה:

a_n	c_n	
$a_1 \neq 0$	$a_1 \neq 0$	a_1
d	$d+3$	d
n	n	n

$$\text{נתון } S_{c_n} = 2S_{a_n}$$

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (d+3)(n-1)) = \frac{2n}{2}(2a_1 + d(n-1)) \quad /: \frac{n}{2} \neq 0$$

$$2a_1 + (d+3)(n-1) = 4a_1 + 2d(n-1)$$

$$(n-1)(d+3-2d) = 2a_1$$

$$(n-1)(d+3-2d) = 2 \cdot \frac{d(n-1)}{4} \quad /: (n-1) \neq 0$$

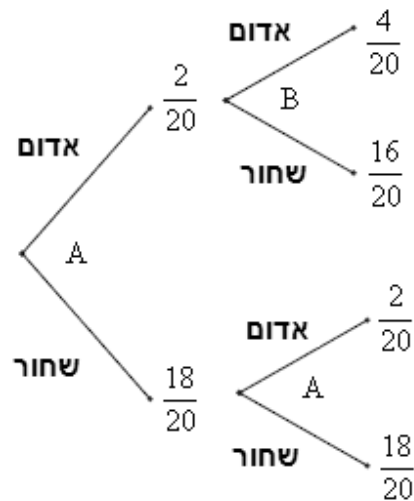
$$12 - 4d = 2d$$

$$-6d = -12$$

$$d = 2$$

תשובה: הוכח.

א. נעלה עץ אפשרויות עבור תור אחד של המשחק.



כיוון שבשלב הראשון נעצר הגלגל A על גזרה אדומה, הרי שהמשתתף מסובב את גלגל B,

וההסתברות שתתקבל גזרה שחורה בשלב זה, השלב השני, היא $\frac{16}{20} = 0.8$.

תשובה: ההסתברות היא 0.8 .

ב. (1) ההסתברות שבתור אחד תתקבל לפחות גזרה אדומה אחת,

היא המאורע המשלים לקבלה של שתי גזרות שחורות.

$$P(\text{at least 1 red}) = 1 - \frac{18}{20} \cdot \frac{18}{20} = 0.19$$

תשובה: ההסתברות היא 0.19 .

(2) נחשב את ההסתברות המותנית המבוקשת:

$$\begin{aligned} P(\text{exactly 1 red} / \text{at least 1 red}) &= \frac{P(\text{exactly 1 red} \cap \text{at least 1 red})}{P(\text{at least 1 red})} = \\ &= \frac{\frac{2}{20} \cdot \frac{16}{20} + \frac{18}{20} \cdot \frac{2}{20}}{0.19} = \frac{0.17}{0.19} = \frac{17}{19} \end{aligned}$$

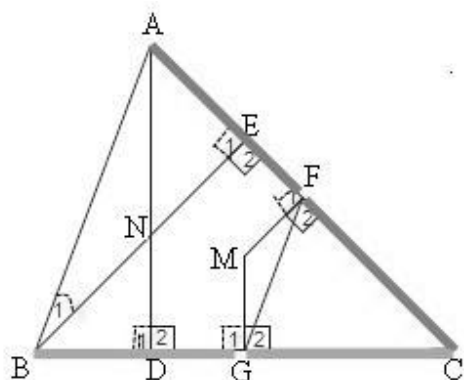
תשובה: ההסתברות היא $\frac{17}{19}$.

$$ג. P(2 \text{ black}) = \frac{18}{20} \cdot \frac{18}{20} = 0.81$$

אם נשחק משחק זה n תורות, כאשר ההסתברויות אינן תלויות,

הרי שההסתברות שלא תתקבל כלל גזרה אדומה היא 0.81^n

תשובה: ההסתברות היא 0.81^n .

**נתונים**

$$\angle D_1 = \angle D_2 = 90^\circ \quad .2 \quad \angle E_1 = \angle E_2 = 90^\circ \quad .1$$

$$AF = CF \quad .4 \quad \angle F_1 = \angle F_2 = 90^\circ \quad .3$$

$$BG = CG \quad .6 \quad \angle G_1 = \angle G_2 = 90^\circ \quad .5$$

$$\angle BAC = \angle GFC \quad (1) \quad \text{צ"ל: א.}$$

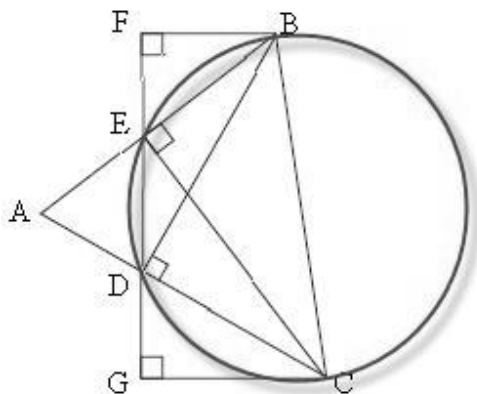
$$\angle ABN = \angle MFG \quad (2)$$

$$\triangle ANB : \triangle GMF \quad (3)$$

$$\frac{BN}{FM} \quad \text{ב.}$$

נימוק	טענה	מס'	הסבר
נתון	$BG = CG$	7	6
נתון	$AF = CF$	8	4
מחבר אמצעי שתי צלעות	FG קטע אמצעים $\triangle ABC$	9	8,7
קטע אמצעים מקביל לצלע השלישית	FG \parallel AB	10	9
זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים	$\angle BAC = \angle GFC$	11	10
מ.ש.ל. א (1)			
נתון	$\angle E_1 = 90^\circ$	12	1
סכום זוויות 180° $\triangle ABE$	$\angle ABN = 90^\circ - \angle BAC$	13	12
נתון	$\angle F_2 = 90^\circ$	14	3
הפרש זוויות	$\angle MFG = 90^\circ - \angle GFC$	15	14
הצבה	$\angle ABN = \angle MFG$ (ז)	16	15,13,11
מ.ש.ל. א (2)			
נתון	$\angle G_2 = 90^\circ$	17	5
סכום זוויות 360° מרובע CFMG	$\angle FMG = 180^\circ - \angle C$	18	17,14
נתון	$\angle D_2 = 90^\circ$	19	2
סכום זוויות 360° מרובע CEND	$\angle END = 180^\circ - \angle C$	20	19,12
זוויות קדקודיות שוות זו לזו	$\angle ANB = \angle END = 180^\circ - \angle C$	21	20
כלל מעבר	$\angle ANB = \angle FMG$ (ז)	22	18,21
משפט דמיון זווית זווית	$\triangle ANB : \triangle GMF$	23	22,16
מ.ש.ל. א (3)			
יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים	$\frac{AN}{GM} = \frac{AB}{GF} = \frac{NB}{MF}$	24	23
קטע אמצעים שווה למחצית הצלע השלישית	$\frac{AB}{GF} = 2$	25	9

כלל מעבר	$\frac{BN}{FM} = 2$	26	25,24
מ.ש.ל. ב			

**נתונים**

$$\angle BDC = 90^\circ \quad 2 \quad \angle BEC = 90^\circ \quad 1$$

עבור ב

$$\angle G = 90^\circ \quad 4 \quad \angle F = 90^\circ \quad 3$$

צ"ל: א. $\triangle DBC$ ו- $\triangle BEC$ חסומים באותו מעגל

$$\angle DBC = \angle DEC \quad (2)$$

ב. $\triangle DCB : \triangle FEB$ ג. $\triangle DGC : \triangle BEC$

נימוק	טענה	מס'	הסבר
נתון	$\angle BDC = 90^\circ$	5	2
נשען על זווית היקפית ישרה	BC קוטר המעגל החוסם $\triangle DBC$	6	5
נתון	$\angle BEC = 90^\circ$	7	1
נשען על זווית היקפית ישרה	BC קוטר המעגל החוסם $\triangle DBC$	8	7
הקטרים מתלכדים	$\triangle BEC$ ו- $\triangle DBC$ חסומים באותו מעגל	9	8, 6
מ.ש.ל. א (1)			
על קשתות שוות $\overset{\frown}{BC}$ מונחות זוויות היקפיות שוות	$\angle DBC = \angle DEC$	10	9
מ.ש.ל. א (2)			
נתון	$\angle F = 90^\circ$	11	3
כלל המעבר	$\angle F = \angle BDC$ (ז)	12	11, 5
זווית שטוחה שווה 180°	$\angle FEB = 90^\circ - \angle DEC$	13	7
סכום זוויות 180° ב- $\triangle FBE$	$\angle FBE = \angle DEC$	14	13, 11
כלל המעבר	$\angle DBC = \angle FBE$ (ז)	15	14, 10
משפט דמיון זווית זווית	$\triangle DCB : \triangle FEB$	16	15, 12
מ.ש.ל. ב			
על קשתות שוות $\overset{\frown}{BE}$ מונחות זוויות היקפיות שוות	$\angle BCE = \angle EDB$	17	9
נתון	$\angle G = 90^\circ$	18	4
כלל המעבר	$\angle G = \angle BEC$ (ז)	19	18, 7
זווית שטוחה שווה 180°	$\angle GDC = 90^\circ - \angle EDB$	20	5
סכום זוויות 180° ב- $\triangle CGD$	$\angle GCD = \angle EDB$	21	20, 18

כלל המעבר	(ז) $\angle GCD = \angle BCE$	22	21, 17
משפט דמיון זווית זווית	$\triangle DGC : \triangle BEC$	23	22, 19
מ.ש.ל. ג			

א. נעלה את השרטוט המעודכן, כולל לסעיף ב, והסברים בהתאם:

ABCD טרפז, AD \perp BC (נתון)

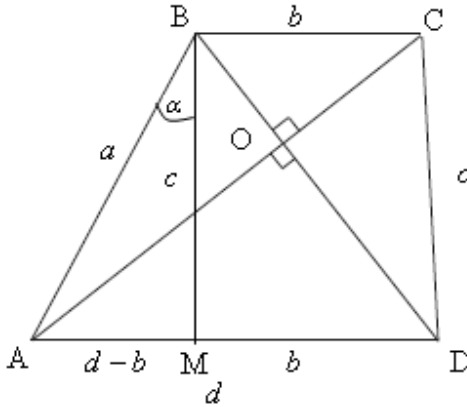
BMPCD (נתון)

DCBM מקבילית (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות)

BM = CD = c (צלעות נגדיות שוות במקבילית)

MD = BC = b (צלעות נגדיות שוות במקבילית)

AM = d - b (הפרש קטעים)



ניעזר במשפט פיתגורס בארבעה משולשים

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AOB: a^2 = BO^2 + AO^2 \\ \triangle COD: c^2 = CO^2 + DO^2 \end{array} \right\} a^2 + c^2 = BO^2 + AO^2 + CO^2 + DO^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BOC: b^2 = BO^2 + CO^2 \\ \triangle AOD: d^2 = AO^2 + DO^2 \end{array} \right\} b^2 + d^2 = BO^2 + AO^2 + CO^2 + DO^2$$

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \text{ ועל פי כלל המעבר}$$

הוכח

ב. נשתמש במשפט הקוסינוסים

$$\triangle BAM: AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos \angle ABM$$

$$(d - b)^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos a$$

$$d^2 - 2bd + b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos a$$

$$-2bd = -2ac \cdot \cos a \quad \leftarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

$$\boxed{\cos a = \frac{bd}{ac}}$$

הוכח

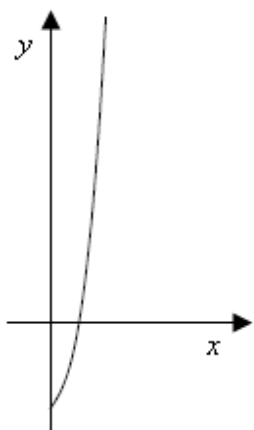
ג. (1) נמצא את שטח המשולש ABM

$$S_{\triangle ABM} = \frac{AB \cdot MB \cdot \sin \angle ABM}{2} = \frac{ac \sin a}{2} = \frac{bd}{\cos a} \frac{\sin a}{2} = \boxed{\frac{bd \tan a}{2}}$$

(2) נמצא את שטח הטרפז ABCD :

$\triangle BAM$: $\frac{a}{\sin \angle BAM} = \frac{d-b}{\sin a} \rightarrow \sin \angle BAM = \frac{a \sin a}{d-b} \rightarrow \sin \angle BMD = \frac{a \sin a}{d-b}$ משפט סינוסים:

$$S_{ABCD} = \frac{bd \tan a}{2} + bc \cdot \frac{a \sin a}{d-b} = \frac{bd \tan a}{2} + b \cdot \frac{\sin a}{d-b} \cdot \frac{bd}{\cos a} = \frac{bd \tan a (d-b+2b)}{2(d-b)} = \boxed{\frac{bd \tan a (d+b)}{2(d-b)}}$$



$$f(x) = \frac{2x(x+2) + 2(x+2)(x-2)}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{(x+2)(2x^3 + 2(x-2))}{x+2}$$

$$f(x) = (2x^3 + 2x - 4), x \neq -2$$

א. נתונה הפונקציה $(x \neq -2) \quad f(x) = \frac{2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8}{x+2}$

חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה,

לכן ניתן לחלק את הפולינומים לפני השרטוט וביצוע האינטגרל.

$$\frac{2x^3 + 2x - 4}{2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8} \Big| x+2$$

$$\frac{2x^4 + 4x^3}{2x^4 + 4x^3} = 2x^2 - 8$$

$$= \frac{2x^2 + 4x}{-4x - 8}$$

$$= \frac{-4x - 8}{-4x - 8}$$

לכן ניתן לרשום את הפונקציה בתחום מפוצל

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x - 4 & x \neq -2 \\ \emptyset & x = -2 \end{cases}$$

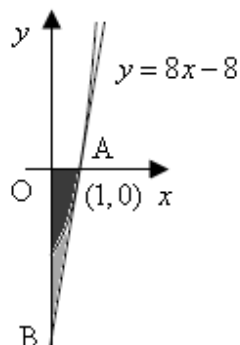
נמצא את משוואת המשיק

נקודת ההשקה $f(1) = 2 \cdot 1^3 = 2 \cdot 1 - 4 = 0 = (1, 0)$

שיפוע $f'(x) = 6x^2 + 2 \rightarrow f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 2 = 8$

משוואת המשיק: $y - 0 = 8(x - 1) \rightarrow \boxed{y = 8x - 8}$

תשובה: $y = 8x - 8$



משולש ישר זווית $S_{\Delta AOB} = \frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{1 \cdot 8}{2} = 4 \leftarrow B(0, -8)$

$$S_{\text{RED}} = \int_0^1 (0 - (2x^3 + 2x - 4)) dx = \left(-\frac{2x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + 4x \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{-2 \cdot 1^3}{4} - 1^2 + 4 \cdot 1 \right) - \left(\frac{-2 \cdot 0^3}{4} - 0^2 + 4 \cdot 0 \right) = 2.5$$

ובהתאם: $S_{\text{GREEN}} = 4 - 2.5 = 1.5$

תשובה: 1.5 יח"ר

ב. (1) נתונה הפונקציה

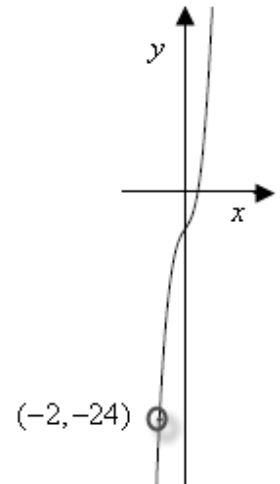
$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x - 4 & x \neq -2 \\ \emptyset & x = -2 \end{cases}$$

(שעבורו הפונקציה אינה מוגדרת) עבור $x \neq -2$ חיובי $f'(x) = 6x^2 + 2$

(שעבורו הפונקציה אינה מוגדרת) עבור $x \neq -2$ חיובי $f'(x) = 6x^2 + 2$

הפונקציה עולה עבור $x > -2$ או $x < -2$

(2) הסקיצה המתאימה, כאשר נקודת אי הרציפות $f(2) = 2 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2) - 4 = -24 = (-2, -24)$

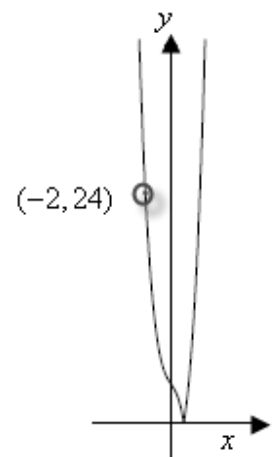


ג. $g(x) = |f(x)|$, ובהתאם ערכי $g(x)$ נגדיים לערכי $f(x)$ עבור $x < 1$ שהוא האפס של $f(x)$

$$g(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x - 4 & x \geq 1 \\ \emptyset & x = -2 \\ -2x^3 - 2x + 4 & x < 1, x \neq -2 \end{cases}$$

כאשר נקודת אי הרציפות $(-2, 24)$

למעשה, עבור $x < 1$ "מקפלים" את גרף הפונקציה סביב ציר ה- x



א. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 - \cos x - \sin^2 x$ בתחום $-p \leq x \leq p$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$, כלומר $(0,1)$ $\rightarrow f(0) = 2 - \cos 0 - \sin^2 0 = 1$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$,

אולם כיוון ש- $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$ וכאשר $\sin^2 x = 0 \rightarrow \cos x = \pm 1$ הרי $2 - \cos x - \sin^2 x$ לא יתאפס לעולם.

תשובה: $(0,1)$

ב. נמצא את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור:

$$f(p) = 2 - \cos p - \sin^2 p = 3 \rightarrow (p, 3), \quad f(-p) = 2 - \cos(-p) - \sin^2(-p) = 3 \rightarrow (-p, 3)$$

$$f'(x) = \sin x - 2 \sin x \cos x$$

$$0 = \sin x - 2 \sin x \cos x \rightarrow 0 = \sin x(1 - 2 \cos x)$$

$$\sin x = 0 \quad \cos x = 0.5$$

$$x = pk \quad x = \frac{p}{3} + 2pk \quad x = -\frac{p}{3} + 2pk$$

$$k=0 \rightarrow x=0 \quad k=1 \rightarrow x=p, \quad x=\frac{p}{3}, \quad x=-\frac{p}{3} \quad k=-1 \rightarrow x=-p$$

נמצא את ערכי הפונקציה בנקודות בחשודות כקיצון

$$f\left(\frac{p}{3}\right) = 2 - \cos\frac{p}{3} - \sin^2\frac{p}{3} = 0.75 \rightarrow \left(\frac{p}{3}, 0.75\right), \quad f\left(-\frac{p}{3}\right) = 2 - \cos\left(-\frac{p}{3}\right) - \sin^2\left(-\frac{p}{3}\right) = 0.75 \rightarrow \left(-\frac{p}{3}, 0.75\right)$$

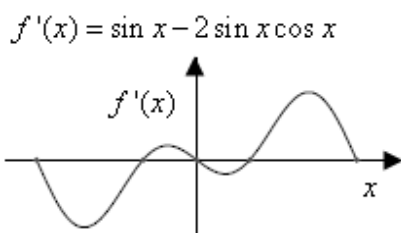
נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה ונזהה את הקיצון המוחלט.

לצורך סעיף ג' נסמן גם את סימני הנגזרת, ונרשום את ערכיה בנקודות הקצה (נמצאו במהלך סעיף זה)

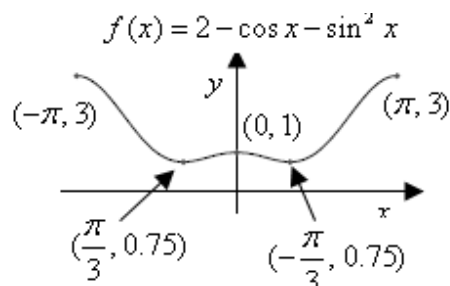
$-p$		$-\frac{p}{3}$		$-\frac{p}{3}$		$\frac{p}{3}$		p	x
3		0.75		1		0.75		3	$f(x)$
0	-	0	+	0	-	0	+	0	$f'(x)$
Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min	↗	Max	מסקנה

תשובה: $(-p, 3)$, $(p, 3)$ מקסימום מוחלט, $\left(-\frac{p}{3}, 0.75\right)$, $\left(\frac{p}{3}, 0.75\right)$ מינימום מוחלט

ג. (1) נצייר סקיצה מתאימה של הפונקציה



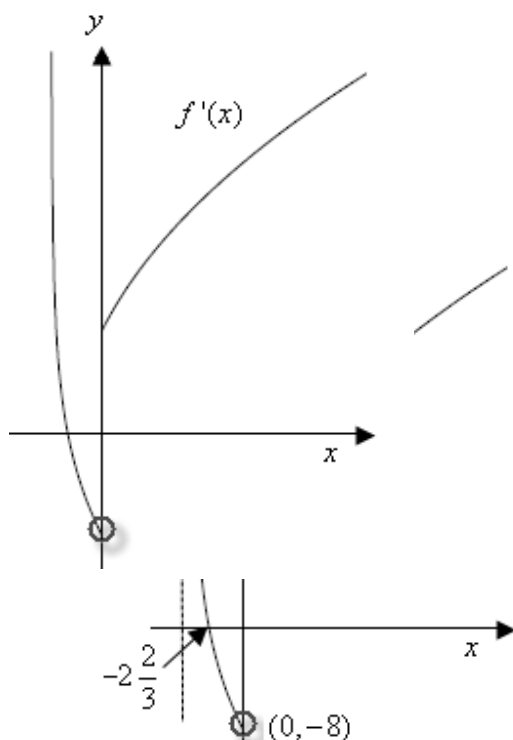
ג. (2) נצייר סקיצה מתאימה של הפונקציה



ד. רק אם נעשה הסטה אנכית של 1 יחידות, גרף הפונקציה ישיק לציר ה- x פעם אחת בלבד,

במקרה זה נקבל את הפונקציה $y = 1 - \cos x - \sin^2 x$ ובהתאם $a = 1$

תשובה: $a = 1$



א. נתון $f'(x) = \frac{6x^2 + 16x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}}$

נמצא את תחום ההגדרה

$$x^3 + 4x^2 > 0 \rightarrow x^2(x+4) > 0$$

הביטוי האלגברי x^2 חיובי עבור $x \neq 0$

הביטוי האלגברי $x+4$ חיובי עבור $x > -4$

תשובה: $x > -4, x \neq 0$

ב. $x = -4$ מאפס מכנה ולא מונה, לכן $x = -4$ אסימפטוטה אנכית.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6x^2 + 16x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(6x+16)}{|x|\sqrt{x+4}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(6x+16)}{-x\sqrt{x+4}} = \frac{16}{-2} = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x^2 + 16x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(6x+16)}{|x|\sqrt{x+4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(6x+16)}{x\sqrt{x+4}} = \frac{16}{2} = 8$$

ובהתאם גרף הנגזרת שואף לנקודות $(0, -8)$, $(0, 8)$

תשובה: $x = -4$ אסימפטוטה אנכית.

ג. נמצא מתי מתאפסת נגזרת הפונקציה

$$0 = \frac{6x^2 + 16x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}}$$

$$0 = 6x^2 + 16x \quad /: 2x \neq 0$$

$$0 = 3x + 8$$

$$x = -2\frac{2}{3}$$

נבנה טבלת עלייה ירידה של הפונקציה $f(x)$

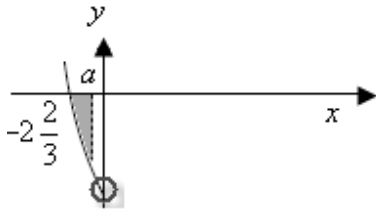
בהתאם לסימני $f'(x)$ מהסקיצה של $f'(x)$

תשובה: $x = -2\frac{2}{3}$ מקסימום.

ד. תשובה: עלייה $x > 0$ או $-4 < x < -2\frac{2}{3}$, ירידה $-2\frac{2}{3} < x < 0$

$$\int_{-2\frac{2}{3}}^a (0 - f'(x)) dx = -f(x) \Big|_{-2\frac{2}{3}}^a = -f(a) + f(-2\frac{2}{3}) \quad \text{ה.}$$

נתון: $-2\frac{2}{3} < a < 0, f(a) = 4\sqrt{3}$



$$\frac{28\sqrt{3}}{9} = -4\sqrt{3} + f\left(-2\frac{2}{3}\right)$$

$$f\left(-2\frac{2}{3}\right) = 12.32$$

תשובה: ערך הפונקציה בנקודת המקסימום הוא 12.32