א. נסמן ב- x את מהירות לרוכב האופניים שיצא מ- A (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- y את מהירות לרוכב האופניים שיצא מ- B (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- s את המרחק בין A עד B (ק"מ)

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
מ- A עד מפגש	4	x	$4x$
מ- B עד מפגש	4	y	$4y$
מ- A עד B	$\frac{s}{x}$	x	s
מ- B עד A	$\frac{s}{y}$	y	s

הרוכבים נפגשו לאחר 4 שעות, והמשוואה המתאימה היא $4x+4y=s$

הזמן שנדרש לרוכב מ- A לעבור את כל הדרך

גדול ב- 108 דקות מהזמן שנדרש לרוכב שיצא מ- B והמשוואה המתאימה היא $\frac{s}{x}=\frac{s}{y}+1.8$.

אנו מעוניינים לחשב את היחס $\frac{y}{x}$ **ולכן נציב את** $s=4x+4y$ **במשוואה השנייה.**

נפתור את המשוואה:

$$\frac{4x+4y}{x}=\frac{4x+4y}{y}+1.8$$

$$4+4\cdot\frac{y}{x}=4\cdot\frac{x}{y}+4+1.8 \quad \rightarrow \boxed{\frac{y}{x}=t}$$

$$4t=\frac{4}{t}+1.8 \quad \rightarrow 4t^2-1.8t-4=0$$

$$t_{1,2}=\frac{1.8\pm 8.2}{8}$$

$$\cancel{t_1=-0.8\quad 0} \quad \leftarrow \frac{y}{x}>0 \quad t_2=1.25 \quad \rightarrow \frac{y}{x}=1.25 \quad o.k.$$

תשובה: היחס הוא 1.25.

ב. זמן הרכיבה של הרוכב שיצא מ- A הוא $\frac{s}{x}$ ושל הרוכב $\frac{s}{y}$ שיצא מ- B.

בהתאם נציב $y=1.25x$ במשוואה השנייה:

$$\frac{s}{x}=\frac{s}{1.25x}+1.8 \quad \rightarrow 0.2\cdot\frac{s}{x}=1.8 \quad \rightarrow \frac{s}{x}=9$$

$$\frac{s}{y}=9-1.8 \quad \rightarrow \frac{s}{y}=7.2$$

תשובה: הרוכב שיצא מ- A עבר את הדרך ב- 9 שעות והרוכב שיצא מ- B עבר את הדרך ב- 7.2 שעות.

א. נרכז את נתוני שתי הסדרות המדוברות בטבלה מתאימה:

a_n	b_n	
$a_1 \neq 0$	$b_1 = 4a_1$	a_1
d	d	d
n	n	n

נתון $S_{b_n} = 2S_{a_n}$

$$\frac{n}{2}(8a_1 + d(n-1)) = \frac{2n}{2}(2a_1 + d(n-1)) \quad /:\frac{n}{2} \neq 0$$
$$8a_1 + d(n-1) = 4a_1 + 2d(n-1)$$
$$4a_1 = d(n-1)$$
$$\boxed{a_1 = \frac{d(n-1)}{4}}$$

תשובה: $a_1 = \frac{d(n-1)}{4}$ **.**

ב. נרכז את נתוני שתי הסדרות המדוברות בטבלה מתאימה:

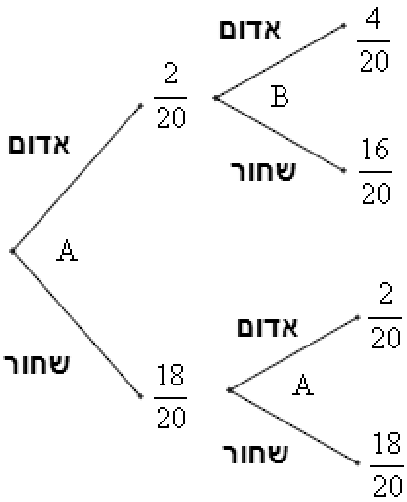
a_n	c_n	
$a_1 \neq 0$	$a_1 \neq 0$	a_1
d	$d+3$	d
n	n	n

נתון $S_{c_n} = 2S_{a_n}$

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (d+3)(n-1)) = \frac{2n}{2}(2a_1 + d(n-1)) \quad /:\frac{n}{2} \neq 0$$
$$2a_1 + (d+3)(n-1) = 4a_1 + 2d(n-1)$$
$$(n-1)(d+3-2d) = 2a_1$$
$$(n-1)(d+3-2d) = 2\cdot\frac{d(n-1)}{4} \quad /:(n-1) \neq 0$$
$$12 - 4d = 2d$$
$$-6d = -12$$
$$\boxed{d = 2}$$

תשובה: הוּכַח.

א. נעלה עץ אפשרויות עבור תור אחד של המשחק.



כיוון שבשלב הראשון נעצר הגלגל A **על גזרה אדומה, הרי שהמשתתף מסובב את גלגל** B**,**

וההסתברות שתתקבל גזרה שחורה בשלב זה, השלב השני, היא $0.8 = \frac{16}{20}$**.**

תשובה: ההסתברות היא 0.8 **.**

ב. (1) ההסתברות שבתור אחד תתקבל לפחות גזרה אדומה אחת,

היא המאורע המשלים לקבלה של שתי גזרות שחורות.

$$\mathrm{P}(\textit{at least}\,1\,\textit{red}) = 1 - \frac{18}{20}\cdot\frac{18}{20} = 0.19$$

תשובה: ההסתברות היא 0.19**.**

(2) נחשב את ההסתברות המותנית המבוקשת:

$$\mathrm{P}(\textit{exactly}\ 1\ \textit{red} / \textit{at least}\,1\,\textit{red}) = \frac{\mathrm{P}(\textit{exactly}\ 1\ \textit{red} \cap \textit{at least}\,1\,\textit{red})}{\mathrm{P}(\textit{eat least}\,1\,\textit{red})} =$$

$$= \frac{\frac{2}{20}\cdot\frac{16}{20} + \frac{18}{20}\cdot\frac{2}{20}}{0.19} = \frac{0.17}{0.19} = \frac{17}{19}$$

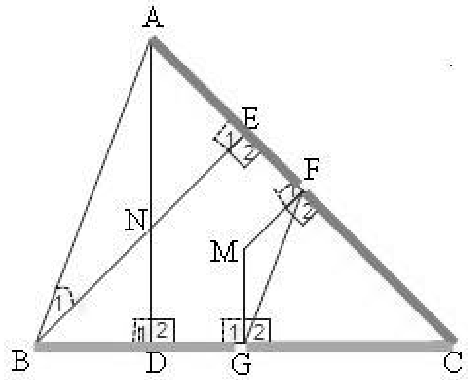
תשובה: ההסתברות היא $\frac{17}{19}$ **.**

ג. $\mathrm{P}(2\,\textit{black}) = \frac{18}{20}\cdot\frac{18}{20} = 0.81$**.**

אם נשחק משחק זה n **תורות, כאשר ההסתברויות אינן תלויות,**

הרי שההסתברות שלא תתקבל כלל גזרה אדומה היא 0.81^n

תשובה: ההסתברות היא 0.81^n**.**



נתונים

.1 $\angle E_1 = \angle E_2 = 90°$ **.2** $\angle D_1 = \angle D_2 = 90°$

.3 $\angle F_1 = \angle F_2 = 90°$ **.4** $AF = CF$

.5 $\angle G_1 = \angle G_2 = 90°$ **.6** $BG = CG$

צ"ל: א. (1) $\angle BAC = \angle GFC$

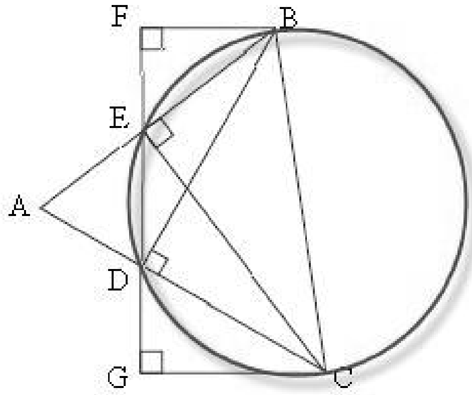
(2) $\angle ABN = \angle MFG$

(3) $\Delta ANB \sim \Delta GMF$

ב. $\frac{BN}{FM}$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
6	7	$BG = CG$	נתון
4	8	$AF = CF$	נתון
7, 8	9	FG קטע אמצעים ΔABC	מחבר אמצעי שתי צלעות
9	10	$FG \parallel AB$	קטע אמצעים מקביל לצלע השלישית
10	11	$\angle BAC = \angle GFC$	זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים
		מ.ש.ל. א (1)	
1	12	$\angle E_1 = 90°$	נתון
12	13	$\angle ABN = 90° - \angle BAC$	סכום זוויות $180°$ ΔABE
3	14	$\angle F_2 = 90°$	נתון
14	15	$\angle MFG = 90° - \angle GFC$	הפרש זוויות
11, 13, 15	16	$\angle ABN = \angle MFG$ (ז)	הצבה
		מ.ש.ל. א (2)	
5	17	$\angle G_2 = 90°$	נתון
14, 17	18	$\angle FMG = 180° - \angle C$	סכום זוויות $360°$ מרובע $CFMG$
2	19	$\angle D_2 = 90°$	נתון
12, 19	20	$\angle END = 180° - \angle C$	סכום זוויות $360°$ מרובע $CEND$
20	21	$\angle ANB = \angle END = 180° - \angle C$	זוויות קדקודיות שוות זו לזו
18,21	22	(ז) $\angle ANB = \angle FMG$	כלל מעבר
16, 22	23	$\Delta ANB \sim \Delta GMF$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א (3)	
23	24	$\frac{AN}{GM} = \frac{AB}{GF} = \frac{NB}{MF}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
9	25	$\frac{AB}{GF} = 2$	קטע אמצעים שווה למחצית הצלע השלישית

24, 25	26	$\frac{BN}{FM}=2$	**כלל מעבר**
מ.ש.ל. ב			



נתונים

1. $\angle BEC = 90°$ **. 2** $\angle BDC = 90°$

עבור ב

3. $\angle F = 90°$ **.4** $\angle G = 90°$

צ"ל: א. (1) ΔDBC **ו-** ΔEBC **חסומים באותו מעגל**

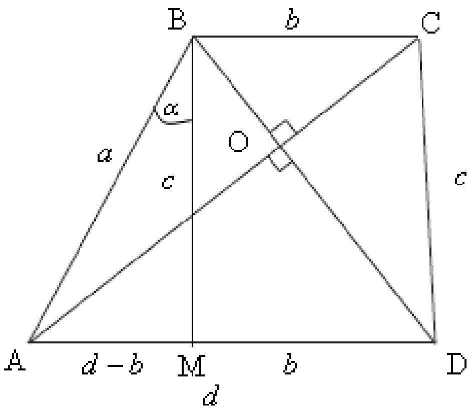
(2) $\angle DBC = \angle DEC$

ב. $\Delta FEB \sim \Delta DCB$ **ג.** $\Delta BEC \sim \Delta DGC$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
2	5	$\angle BDC = 90°$	נתון
5	6	BC קוטר המעגל החוסם ΔDBC	נשען על זווית היקפית ישרה
1	7	$\angle BEC = 90°$	נתון
7	8	BC קוטר המעגל החוסם ΔDBC	נשען על זווית היקפית ישרה
8 ,6	9	ΔDBC ו- ΔEBC חסומים באותו מעגל	הקטרים מתלכדים
		מ.ש.ל. א (1)	
9	10	$\angle DBC = \angle DEC$	על קשתות שוות $\overset{\frown}{DC}$ מונחות זוויות היקפיות שוות
		מ.ש.ל. א (2)	
3	11	$\angle F = 90°$	נתון
11 ,5	12	$\angle F = \angle BDC$ (ז)	כלל המעבר
7	13	$\angle FEB = 90° - \angle DEC$	זווית שטוחה שווה $180°$
13 ,11	14	$\angle FBE = \angle DEC$	סכום זוויות $180°$ ב- ΔFBE
14 ,10	15	$\angle DBC = \angle FBE$ (ז)	כלל המעבר
15 ,12	16	$\Delta FEB \sim \Delta DCB$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. ב	
9	17	$\angle BCE = \angle EDB$	על קשתות שוות $\overset{\frown}{BE}$ מונחות זוויות היקפיות שוות
4	18	$\angle G = 90°$	נתון
18 ,7	19	$\angle G = \angle BEC$ (ז)	כלל המעבר
5	20	$\angle GDC = 90° - \angle EDB$	זווית שטוחה שווה $180°$
20 ,18	21	$\angle GCD = \angle EDB$	סכום זוויות $180°$ ב- ΔCGD

17, 21	22	$\angle GCD = \angle BCE$ (ז)	כלל המעבר
19, 22	23	$\Delta DGC \sim \Delta BEC$	משפט דמיון זווית זווית
מ.ש.ל. ג			

א. נעלה את השרטוט המעודכן, כולל לסעיף ב, והסברים בהתאם:



$ABCD$ **טרפז,** $AD \parallel BC$ **(נתון)**

$BM \parallel CD$ **(נתון)**

$DCBM$ **מקבילית (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות)**

$BM = CD = c$ **(צלעות נגדיות שוות במקבילית)**

$MD = BC = b$ **(צלעות נגדיות שוות במקבילית)**

$AM = d - b$ **(הפרש קטעים)**

ניעזר במשפט פיתגורס בארבעה משולשים

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\Delta AOB}: \quad a^2 = BO^2 + AO^2 \\ \underline{\Delta COD}: \quad c^2 = CO^2 + DO^2\end{array}\right\} a^2 + c^2 = BO^2 + AO^2 + CO^2 + DO^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\Delta BOC}: \quad b^2 = BO^2 + CO^2 \\ \underline{\Delta AOD}: \quad d^2 = AO^2 + DO^2\end{array}\right\} b^2 + d^2 = BO^2 + AO^2 + CO^2 + DO^2$$

ועל פי כלל המעבר $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

הוּכַח

ב. נשתמש במשפט הקוסינוסים

$$\underline{\Delta BAM}: \quad AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos\angle ABM$$

$$(d-b)^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$d^2 - 2bd + b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha$$

$$-2bd = -2ac \cdot \cos\alpha \quad \leftarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{bd}{ac}}$$

הוּכַח

ג. (1) נמצא את שטח המשולש ABM

$$S_{\Delta ABM}=\frac{AB\cdot MB\cdot\sin\angle ABM}{2}=\frac{ac\sin a}{2}=\frac{\frac{bd}{\cos a}\sin a}{2}=\boxed{\frac{bd\tan a}{2}}$$

(2) נמצא את שטח הטרפז ABCD **:**

משפט סינוסים: $\underline{\Delta BAM}:\quad \frac{a}{\sin\angle BAM}=\frac{d-b}{\sin a}\quad\rightarrow\sin\angle BAM=\frac{a\sin a}{d-b}\quad\rightarrow\sin\angle BMD=\frac{a\sin a}{d-b}$

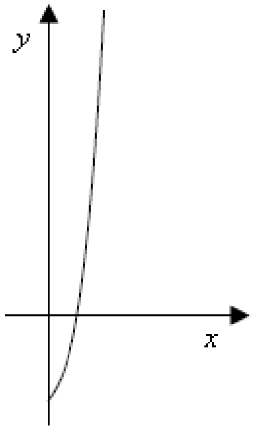
$$S_{ABCD}=\frac{bd\tan a}{2}+bc\cdot\frac{a\sin a}{d-b}=\frac{bd\tan a}{2}+b\cdot\frac{\sin a}{d-b}\cdot\frac{bd}{\cos a}=\frac{bd\tan a\,(d-b+2b)}{2(d-b)}=\boxed{\frac{bd\tan a\,(d+b)}{2(d-b)}}$$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2x^4+4x^3+2x^2-8}{x+2} \qquad (x\neq -2)$

חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה,

לכן ניתן לחלק את הפולינומים לפני השרטוט וביצוע האינטגרל.

$$\begin{array}{l|l}
\underline{2x^3+2x-4} & \\
2x^4+4x^3+2x^2-8 & x+2 \\
\underline{2x^4+4x^3} & \\
\quad = \quad = \quad 2x^2-8 & \\
\qquad\qquad \underline{2x^2+4x} & \\
\qquad\quad = \quad -4x-8 & \\
\qquad\qquad \underline{-4x-8} & \\
\qquad\qquad\ = \ = &
\end{array}$$



$$f(x)=\frac{2x^3(x+2)+2(x+2)(x-2)}{x+2}$$
$$f(x)=\frac{(x+2)(2x^3+2(x-2))}{x+2}$$
$$f(x)=(2x^3+2x-4),\ x\neq -2$$

לכן ניתן לרשום את הפונקציה בתחום מפוצל

$$f(x)=\begin{cases}2x^3+2x-4 & x\neq -2\\ \varnothing & x=-2\end{cases}$$

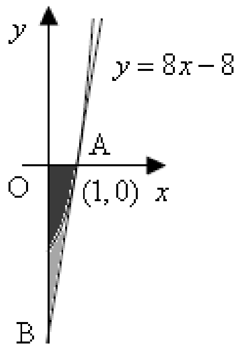
נמצא את משוואת המשיק

נקודת ההשקה $f(1)=2\cdot 1^3=2\cdot 1-4=0=(1,0)$

שיפוע $f'(x)=6x^2+2 \quad \rightarrow f'(1)=6\cdot 1^2+2=8$

משוואת המשיק: $y-0=8(x-1) \quad \rightarrow \boxed{y=8x-8}$

תשובה: $y=8x-8$



משולש ישר זווית $S_{\Delta AOB}=\dfrac{AO\cdot BO}{2}=\dfrac{1\cdot 8}{2}=4 \quad \leftarrow B(0,-8)$

$$S_{RED}=\int_0^1(0-(2x^3+2x-4))\,dx=\left(\frac{-2x^4}{4}-\frac{2x^2}{2}+4x\right)\Bigg]_0^1$$

$$=\left(\frac{-2\cdot 1^3}{4}-1^2+4\cdot 1\right)-\left(\frac{-2\cdot 0^3}{4}-0^2+4\cdot 0\right)=2.5$$

ובהתאם: $S_{GREEN}=4-2.5=1.5$

תשובה: 1.5 **יח"ר**

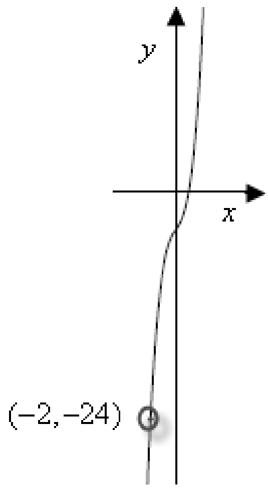
ב. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}2x^3+2x-4 & x\neq -2\\ \varnothing & x=-2\end{cases}$

$f'(x)=6x^2+2$ **חיובי עבור** $x\neq -2$ **(שעבורו הפונקציה אינה מוגדרת)**

$f'(x)=6x^2+2$ **חיובי עבור** $x\neq -2$ **(שעבורו הפונקציה אינה מוגדרת)**

הפונקציה עולה עבור $x>-2$ **או** $x<-2$

(2) הסקיצה המתאימה, כאשר נקודת אי הרציפות $f(2)=2\cdot(-2)^3+2\cdot(-2)-4=-24=(-2,-24)$

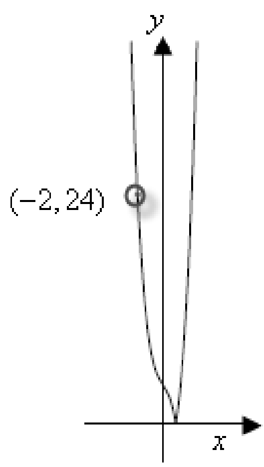


ג. $g(x)=|f(x)|$ **, ובהתאם ערכי** $g(x)$ **נגדיים לערכי** $f(x)$ **עבור** $x<1$ **שהוא האפס של** $f(x)$

$$g(x)=\begin{cases}2x^3+2x-4 & x\geq 1\\ \varnothing & x=-2\\ -2x^3-2x+4 & x<1,\ x\neq -2\end{cases}$$

כאשר נקודת אי הרציפות $(-2,24)$

למעשה, עבור $x<1$ **"מקפלים" את גרף הפונקציה סביב ציר ה-** x



א. נתונה הפונקציה: $f(x)=2-\cos x-\sin^2 x$ **בתחום** $-p \le x \le p$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, כלומר** $f(0)=2-\cos 0-\sin^2 0=1 \quad \to (0,1)$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **,**

אולם כיוון ש- $-1\le \sin x, \cos x \le 1$ **וכאשר** $\cos x=\pm 1 \to \sin^2 x=0$ **הרי** $2-\cos x-\sin^2 x$ **לא יתאפס לעולם.**

תשובה: $(0,1)$

ב. נמצא את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור:

$$f(p)=2-\cos p-\sin^2 p=3 \quad \to (p,3), \quad f(-p)=2-\cos(-p)-\sin^2(-p)=3 \quad \to (-p,3)$$

$$\boxed{f'(x)=\sin x-2\sin x\cos x}$$

$$0=\sin x-2\sin x\cos x \quad \to 0=\sin x(1-2\cos x)$$

$$\sin x=0 \quad \cos x=0.5$$

$$x=pk \quad x=\frac{p}{3}+2pk \quad x=-\frac{p}{3}+2pk$$

$$k=0 \quad \to x=0 \qquad k=1 \quad \to x=p, \quad x=\frac{p}{3}, \quad x=-\frac{p}{3} \qquad k=-1 \quad \to x=-p$$

נמצא את ערכי הפונקציה בנקודות בחשודות כקיצון

$$f(\frac{p}{3})=2-\cos\frac{p}{3}-\sin^2\frac{p}{3}=0.75 \quad \to (\frac{p}{3},0.75), \quad f(-\frac{p}{3})=2-\cos(-\frac{p}{3})-\sin^2(-\frac{p}{3})=0.75 \quad \to (-\frac{p}{3},0.75)$$

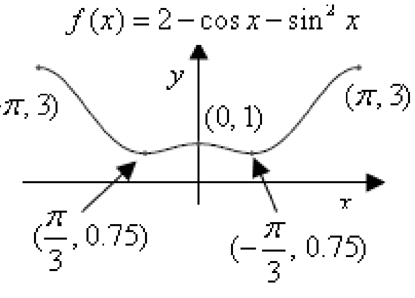
נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה ונזהה את הקיצון המוחלט.

לצורך סעיף ג' נסמן גם את סימני הנגזרת, ונרשום את ערכיה בנקודות הקצה (נמצאו במהלך סעיף זה)

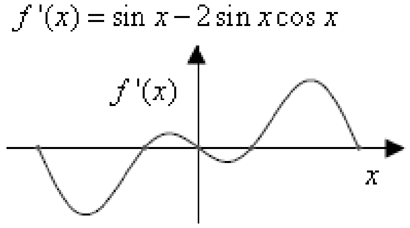
x	p		$\frac{p}{3}$		$-\frac{p}{3}$		$-\frac{p}{3}$		$-p$
$f(x)$	3		0.75		1		0.75		3
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0
מסקנה	**Max**	↗	**Min**	↘	**Max**	↗	**Min**	↘	**Max**

תשובה: $(p,3)$ **,** $(-p,3)$ **מקסימום מוחלט ,** $(-\frac{p}{3},0.75)$ **,** $(\frac{p}{3},0.75)$ **מינימום מוחלט**

ג. (1) נצייר סקיצה מתאימה של הפונקציה



(2) נצייר סקיצה מתאימה של נגזרת הפונקציה



ד. רק אם נעשה הסטה אנכית של 1 **יחידות, גרף הפונקציה ישיק לציר ה-** x **פעם אחת בלבד,**

במקרה זה נקבל את הפונקציה $y=1-\cos x-\sin^2 x$ **ובהתאם** $\boxed{a=1}$

תשובה: $a=1$

א. נתון $f'(x)=\frac{6x^2+16x}{\sqrt{x^3+4x^2}}$

נמצא את תחום ההגדרה

$x^3+4x^2>0 \quad \to x^2(x+4)>0$

הביטוי האלגברי x^2 **חיובי עבור** $x\neq 0$

הביטוי האלגברי $x+4$ **חיובי עבור** $x>-4$

תשובה: $x\neq 0$ **,** $x>-4$

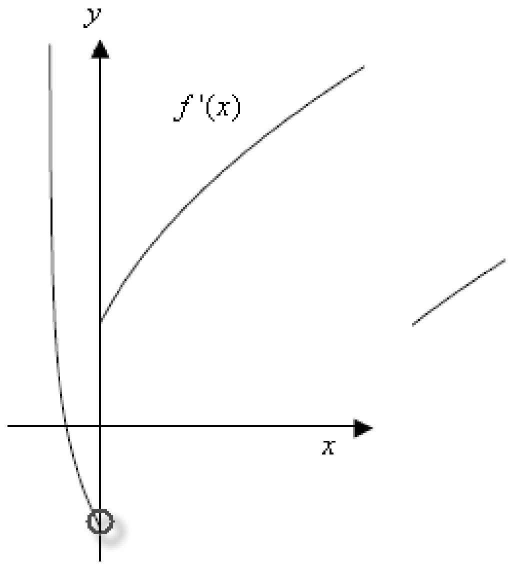
ב. $x=-4$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן** $x=-4$ **אסימפטוטה אנכית.**

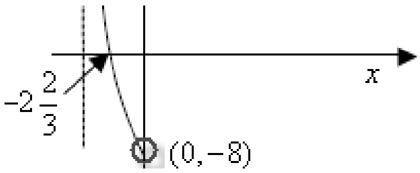
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{6x^2+16x}{\sqrt{x^3+4x^2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(6x+16)}{|x|\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(6x+16)}{-x\sqrt{x+4}}=\frac{16}{-2}=-8$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{6x^2+16x}{\sqrt{x^3+4x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(6x+16)}{|x|\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(6x+16)}{x\sqrt{x+4}}=\frac{16}{2}=8$$

ובהתאם גרף הנגזרת שואף לנקודות $(0,8)$, $(0,-8)$

תשובה: $x=-4$ **אסימפטוטה אנכית.**





ג. נמצא מתי מתאפסת נגזרת הפונקציה

$0=\frac{6x^2+16x}{\sqrt{x^3+4x^2}}$

$0=6x^2+16x \quad /:2x\neq 0$

$0=3x+8$

$x=-2\frac{2}{3}$

x	-4		$-2\frac{2}{3}$		0	
$f'(x)$		+		-		+
מסקנה		↗	Max	↘		↗

נבנה טבלת עלייה ירידה של הפונקציה $f(x)$

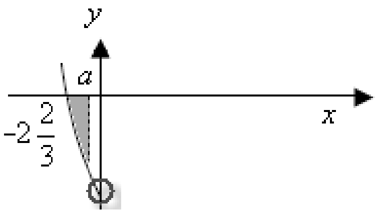
בהתאם לסימני $f'(x)$ **מהסקיצה של** $f'(x)$

תשובה: $x=-2\frac{2}{3}$ **מקסימום.**

ד. תשובה: עלייה $x>0$ **או** $-4<x<-2\frac{2}{3}$**, ירידה** $-2\frac{2}{3}<x<0$

נתון: $f(a)=4\sqrt{3}$ **,** $-2\frac{2}{3}<a<0$

ה. $\int_{-2\frac{2}{3}}^{a}(0-f'(x))\,dx=-f(x)\Big]_{-2\frac{2}{3}}^{a}=-f(a)+f(-2\frac{2}{3})$



$$\frac{28\sqrt{3}}{9} = -4\sqrt{3} + f(-2\frac{2}{3})$$

$$\boxed{f(-2\frac{2}{3}) = 12.32}$$

תשובה: ערך הפונקציה בנקודת המקסימום הוא 12.32