סיכום בגיאומטריה - מתאים לשאלונים 005, 804, 806

פרק זה הינו חלק מסיכום כולל לשאלון 005 שנכתב על-ידי מאיר בכור

השתדלתי שהסיכום המוגש לכם להלן יעזור להפוך את נושא הגיאומטריה לידידותי יותר עבורכם ופחות מאיים.
בסיכום תמצאו כלים להתמודדות עם השאלות בגיאומטריה והדגשה של נקודות חשובות אליהן יש לשים לב. שימוש בכלים אלה יכול להקל במציאת הדרך לפתרון.

א. <u>כללי</u>

1. **קיימות שתי שיטות מקובלות לכתיבת הוכחה בגיאומטריה.**
   א. שיטת "טענה ונימוק".
   ב. שיטת " המספור וההסתמכות" – בנוסף לנימוקים הרגילים, מסתמכים על שורה או שורות כגיבוי לנימוק: " לפי שורה 1 ", או " לפי שורות 5, 3, 2 ".

   מניסיוני, שיטת "המספור וההסתמכות" מקלה ונוחה יותר לשימוש (אין צורך לחלק את הדף לשני אזורים, זה עושה סדר בהוכחה ובמחשבה כי ברור מאיפה כל דבר מגיע). אני ממליץ בחום על שימוש בשיטה זו.

2. **בשאלון 005 אין לפתור שאלות בגיאומטריה בעזרת טריגונומטריה! - התשובה נפסלת חד וחלק. (בשאלונים 804, 806 מותר לשלב בין גיאומטריה וטריגונומטריה).**

3. **חשוב מאד לקרוא היטב את נתוני השאלה – לפעמים דרך הנתונים עצמם "תידלקנה" לכם "נורות" שיצביעו/יזכירו לכם את המשפטים הרלוונטיים לפתרון.**
   מומלץ לרשום בצד את שמות כל המשפטים שנתוני השאלה מזכירים לכם (מה שעולה לכם כאסוציאציות) ולנסות עם משפטים אלו לתקוף את השאלה. (שיטת האלימינציה).

4. **בדרך כלל בבחינה <u>אין נתונים מיותרים</u> ולכן יש להשתמש בכולם להוכחה.**
   במידה ולא השתמשתם באחד הנתונים – סביר להניח שטעיתם.

5. **בכל פתרון של שאלות בגיאומטריה (כולל הוכחת משפטים) יש לרשום:**
   "נתון", צ"ל, "הוכחה". <u>ראו זאת ככלל ברזל!</u>
   רישום מסודר עוזר בהתארגנות לפתרון ומונע דילוג על סעיפים.

6. **בשאלות שסעיף א' שלהן כולל הוכחת משפט – יש לשרטט עבור סעיף זה שרטוט נפרד מהשרטוט הנתון ולהוכיח את המשפט בהתאם.**
   בדרך-כלל, בבחינה, הוכחת המשפט מסעיף א' היא רמז או עזר לפתרון של סעיף ב'.
   עבור סעיף ב' יש לשרטט שרטוט חדש, או את השרטוט הנתון בשאלה.

7. **יש לשרטט את השרטוט בעזרת סרגל ומחוגה (או שבלונת עיגולים) <u>ולא ביד חופשית,</u> ולפיכך, נא להצטייד בהתאם. שרטוט ביד חופשית, בדרך-כלל מטעה ומעוות את התמונה.**

8. הציור/השרטוט הנתון בשאלה הוא סכמתי וללא קנה מידה. לפיכך, אין להוריד ממנו מידות ואין לקבל ממנו פרופורציות כלשהן על גדלים של צלעות, זוויות, שטחים וכו'.

9. יש שאלות בהן מומלץ "לרוץ" עם זווית α בשרטוט או "לרוץ" עם צלע x בשרטוט.
במקרה זה, יש לרשום: "נסמן $\measuredangle ABC = \alpha$" או "נסמן AD = x".
את ה"ריצה" יש לכתוב לא רק בשרטוט, אלא גם כחלק אינטגרלי מההוכחה.

10. כאשר משתמשים בזוויות β_1, β_2... או D_1, D_2..., יש להגדירן בהוכחה בעזרת "נסמן..." וגם לסמנם בשרטוט. בנוסף, זוויות שוות ו/או צלעות שוות, ו/או קווים מקבילים מומלץ לסמן בשרטוט (לא להשאיר את השרטוט "עירום"). כדאי להשתמש גם בצבעים.

11. אין להשתמש באותה אות לסימון נעלמים שונים באותה שאלה – לדוגמא:
$\measuredangle ABC = x$ (זווית), AB = x (קטע), זיכרו – יש עוד אותיות לסימון נעלמים.

12. אין מגבלה לגבי מספר בניות העזר. במידה ומשתמשים בבניית עזר, יש להסביר את הבניה ולסמן אותיות בהתאם ובנוסף <u>חובה לשרטט</u> את השרטוט בדף המבחן.
(בדרך-כלל משתמשים בבניית עזר אחת או שתיים).

13. כאשר משתמשים בבניית עזר חייבים להגדיר את התנאי שבניית העזר מקיימת (למשל – הורדת גובה, העברת משיק, העברת קטע בין שתי נקודות וכד'). בניית עזר זו אינה יכולה לקיים תנאי נוסף – אלא אם כן הוכחתם אותו.

14. לפעמים, כש"לא רואים" את הפתרון, מומלץ להסתכל על השרטוט הנתון מכיוון אחר - מהצד או מלמעלה, לסובב את הדף, ואולי אז "האסימון יירד".

15. אל תחסכו בהסברים מילוליים קצרים ו/או כותרת משנית בשלב הפתרון. לפעמים, הסבר קצר ו/או כותרת יכולים להבהיר לבוחן את כוונתכם בצורה טובה יותר (ואולי, אף להקטין את מספר הנקודות שתרדנה במקרה של טעות).

16. יש לסכם בצורה מילולית את התשובה שהתקבלה: זה מאפשר להתמקד במה ששאלו ולפסול פתרונות מיותרים (בעיקר בשאלות חישוב).
מומלץ בסוף פתרון השאלה לעבור על כל הסעיפים ולראות שעניתם על כולם, ורק על מה שביקשו.

17. יש לרשום יחידות (אורך, שטח, מעלות וכו') לדוגמא:
AD = 5 ס"מ. כאשר אין יחידות בשאלה, יש לרשום: AD = 5 יחידות אורך.
S = 50 סמ"ר. כאשר אין יחידות בשאלה יש לרשום: S = 5 יחידות שטח.

18. כאשר יש שימוש בנוסחא או בביטוי אלגברי – הראו קודם כל את הנוסחא/הביטוי ורק לאחר מכן הציבו בהם את המספרים בהתאם. טעות בהצבת המספרים או בחישוב התוצאה, כאשר ברור מקור המספרים תראה אחרת מאשר "סתם לזרוק מספרים". כשלבוחן לא ברור מקור המספרים הוא עלול לפסול את הבחינה בטענה של "חשד להעתקה"!

19. ניתן לשלב בהוכחה גיאומטרית גם משוואות באלגברה וזאת על-מנת למצוא זוויות, צלעות, שטחים וכו'.

20. בשאלה שבה יש שני סעיפים ויותר, במידה ואינכם מצליחים להוכיח את הסעיף הראשון נסו להוכיח את הסעיפים הבאים כאילו "הוכחתם" את הסעיף הראשון.
כך אולי תקבלו נקודות על הסעיפים הבאים (לפחות תצברו חלק מהנקודות).

21. שימו לב! בדרך-כלל, בבדיקת בחינה, ברגע שנעשה שימוש בנימוק/משפט לא נכון <u>כאן נעצרת בדיקת השאלה</u> (גם אם התוצאה הסופית יצאה <u>במקרה</u> נכונה) לכן, מאד חשוב להיות מדוייקים בטענות ובנימוקים בהם אתם משתמשים.

22. מאד חשוב לכתוב את ההוכחה בצורה מאורגנת, נקייה, ברורה, מרווחת, לא לחלק את הדף לשניים, בלי חיצים של "סימני דרך" ולזכור שיש מקום גם מעבר לדף.
בין סוף הוכחת סעיף א' להתחלת הוכחת סעיף ב' יש לשים רווח של מספר שורות.
כל סעיף רלוונטי צריך להסתיים ב:- " מ.ש.ל. א' ", " מ.ש.ל. ב' " וכו'.

את תשובה הסופית יש לכתוב בצורה ברורה בסוף הפתרון, בוודאי לא מוחבאת (ואפילו מודגשת במרקר).
יש לתת לתשובה הסופית את <u>"הכבוד הראוי לה".</u>

23. יש להדגיש שהאסתטיקה בכתיבת הבחינה:
א. עוזרת בארגון המחשבה, יכולה להפחית מהלחץ ואולי אפילו להוציא "מבלק-אאוט זמני" ובסך-הכל יכולה לעזור בהגעה לפתרון הנכון.
ב. מאפשרת לבודק הבחינה להבחין בכל הפרטים שכתבתם ולהבינם טוב יותר ובכך מונעת הורדת נקודות לחינם.

זיכרו! הבחינה שאתם מגישים היא כמו מוצר שחייב להיות אסתטי ומושך את העין על-מנת ש"הלקוח" – הבודק, יבחין בכל פרטיו.

ב. <u>עקרונות במשפטי חפיפה ודמיון</u>

1. **יש לשים לב שאת "משפט החפיפה" החמישי - ז.ז.צ. <u>לא מקבלים בבחינות כמשפט</u>. שימוש בו כמשפט מוריד נקודות ולכן יש להפוך משפט זה למשפט חפיפה ז.צ.ז. על-ידי הוכחה שגם הזווית השלישית שווה בשני המשולשים (הזווית השלישית משלימה ל- °180).**

2. **שימו לב שבמשפטי החפיפה האות "צ" פירושה שהצלע שווה בשני המשולשים. לעומת זאת, במשפטי הדמיון, האות "צ" פירושה שיש פרופורציה (יחס) בין הצלעות. האות "ז" פירושה - גם במשפטי החפיפה וגם במשפטי דמיון - שהזווית שווה בשני המשולשים.**

3. **במשולש – מול צלעות שוות זוויות שוות ולהיפך. שימו לב! משפט זה נכון כשמדובר באותו משולש עצמו <u>ולא בין שני משולשים</u>.**

4. **בשאלות בפרופורציה ודמיון יש לפרק את המשולשים הדומים, "להוציא אותם החוצה" מהשרטוט, לשרטט אותם אחד ליד השני (ושיהיה דמיון ביניהם) ולהתאים את הקודקודים לזוויות השוות.
יש לרשום את אורכי הצלעות והשטחים הידועים על השרטוט המקורי ועל המשולשים הדומים שהוצאו. רישום כזה מאד עוזר לראות מה קיים ואולי גם את הדרך לפתרון.**

5. **גם בשאלות בפרופורציה ודמיון, לצורך הבהרה, יש לציין את שמו של המשולש אליו מתייחסים.**

6. **במשפט דמיון ז.ז. יש להתייחס לזווית השלישית בצורה מילולית – "ולכן גם הזווית השלישית שווה, כי היא משלימה ל- °180" , או להראות זאת בחישוב מתמטי. בכל מקרה – נא להתייחס לזווית השלישית.**

7. **קיימים מספר משפטים בגיאומטריה שבנימוק ניתן לציינם בשמם בלבד:**

משפט פיתגורס
משפט תאלס
משפט חוצה הזווית
ארבעת משפטי החפיפה
משפטי הדמיון
זווית בין משיק למיתר
משפט תאלס המורחב
משפט הפוך למשפט תאלס

<u>שימו לב</u>! <u>את יתר המשפטים, שאינם מופיעים בפירוט שלעיל, יש לנסח במדוייק</u>.

<u>משפטים בגיאומטריה - נקודות חשובות לתשומת לב:</u>

**בגיאומטריה יש מספר לא-מבוטל של משפטים ואת רובם אתם, התלמידים, מכירים.
ברצוני להסב את תשומת לבכם לנקודות חשובות ולשים דגשים שיוכלו לעזור לכם להבין, לזכור ולהכיר טוב יותר <u>חלק מהמשפטים</u> ובכך לאפשר לכם לעשות שימוש נכון יותר בהם.**

<u>קיימים ארבעה משפטי חפיפה</u>:
(משפטים אלו הינם משפטים שמותר לציין בנימוק את שמם בלבד)

1. **משפט חפיפה צ.ז.צ - צלע, זווית, צלע**
2. **משפט חפיפה ז.צ.ז - זווית, צלע, זווית**
3. **משפט חפיפה צ.צ.צ - צלע, צלע, צלע**
4. **משפט חפיפה צ.צ.ז. - צלע, צלע, זווית**

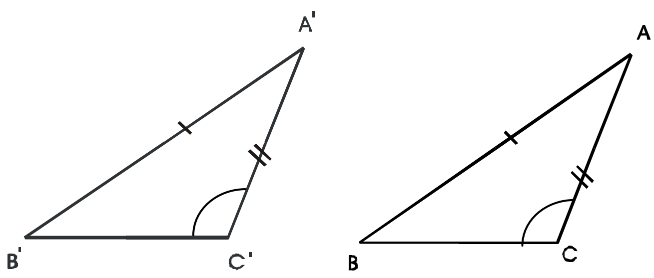
<u>הבהרה לגבי משפט החפיפה הרביעי (צ.צ.ז.)</u>:

<u>משפט זה אומר</u>:

"אם בשני משולשים שוות בהתאמה שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מהשתיים – אז המשולשים חופפים.

<u>שימו לב!</u>
בנוסף לשתי הצלעות השוות והזווית השווה <u>יש להראות כי הזווית השווה אכן נמצאת מול הצלע הגדולה מהשתיים! רק אז המשולשים חופפים!</u>

<u>דוגמא:</u>



1. $AB = A'B'$ **(נתון)**
2. $AC = A'C'$ **(נתון)**
3. $AB > AC$ **(נתון) <u>לא לשכוח!</u>**
4. $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ **(נתון)**
5. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ **(המשולשים חופפים לפי משפט חפיפה צ.צ.ז. ולפי שורות 4 - 1).**

<u>ממשפט החפיפה הרביעי ניתן להסיק כי</u>: -
שני משולשים ישרי זווית השווים ביתר ובאחד הניצבים – חופפים.
(הזווית השווה בשני המשולשים היא $90°$, היתר הוא הגדול בין שתי הצלעות השוות והזווית הישרה היא מול היתר – לפיכך, כל תנאי משפט החפיפה הרביעי מתקיימים).

כאשר משתמשים במשפטי החפיפה הניסוח יהיה לדוגמא: -
"המשולשים חופפים לפי משפט חפיפה צ.צ.צ. ולפי שורות 7 ,4 ,2 ".

הערה: - לאחר ההוכחה כי המשולשים חופפים, ניתן להשתמש בנימוק: "צלעות מתאימות במשולשים חופפים שוות" (צמב"ח) ובנימוק: "זוויות מתאימות במשולשים חופפים שוות" (זמב"ח)

סוגי זוויות בין ישרים מקבילים

קיימים שלושה סוגי זוויות בין ישרים מקבילים: זוויות מתאימות, זוויות מתחלפות וזוויות חד-צדדיות.

בנוסף להגדרות המקובלות של זוויות אלו קיימת שיטה הנקראת "שיטת החיצים" שבעזרתה ניתן לזהות את סוגי הזוויות הנ"ל.

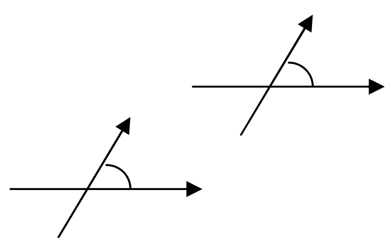
"שיטת החיצים":
סימון החיצים יהיה על שוקי הזווית וכיוונם מקודקוד הזווית החוצה.
כאשר החיצים באותו הכיוון נסמן (+), כאשר החיצים בכיוונים מנוגדים נסמן (-).

אם מתקבלת מכפלה חיובית בין הסימנים, הזוויות הן או מתאימות או מתחלפות:
הזוויות מתאימות כאשר שני הסימנים חיוביים $(+) = (+) \cdot (+)$
הזוויות מתחלפות כאשר שני הסימנים שליליים $(+) = (-) \cdot (-)$

אם מתקבלת מכפלה שלילית, הזוויות הן חד-צדדיות וסכומן שווה ל- 180°.

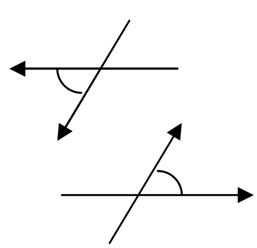
זוויות מתאימות:- כאשר החיצים של שני זוגות הישרים המקבילים באותו הכיוון:

$(+) \cdot (+) = (+)$



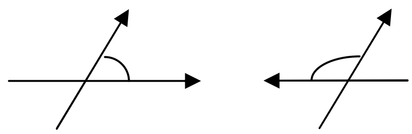
זוויות מתחלפות:- כאשר החיצים של שני זוגות הישרים המקבילים בכיוונים מנוגדים:

$(-) \cdot (-) = (+)$



<u>זוויות חד-צדדיות</u>:- כאשר החיצים של זוג אחד מהישרים המקבילים באותו הכיוון ואילו החיצים של זוג הישרים המקבילים השני יהיו בכיוונים מנוגדים:

(+) · (-) = (-)



דוגמאות לניסוח הנימוק: **"זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות"**
"זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים שוות"
"סכום זוויות חד-צדדיות בין ישרים מקבילים שווה ל- $180°$.

<u>משולשים – משפטים שחשוב לזכור במיוחד</u>

1. שלושת האנכים האמצעים במשולש נפגשים בנקודה אחת.
מפגש שלושת האנכים האמצעים במשולש זהו מרכז המעגל <u>החוסם</u> את המשולש.

<u>שימו לב!</u>
א. מרכז המעגל החוסם משולש ישר-זווית יהיה באמצע היתר.
ב. אם בשאלה נתון מרכז מעגל חוסם, אז הקטעים ממרכז המעגל החוסם לקודקודים שווים, כי הם רדיוסים, ויוצרים שלושה משולשים שווי-שוקיים. לפעמים זוהי בניית עזר מתבקשת.

2. שלושת חוצי הזוויות במשולש נפגשים בנקודה אחת.
מפגש חוצי הזוויות במשולש זהו מרכז המעגל <u>החסום</u> במשולש.

<u>שימו לב!</u> אם בשאלה נתון מרכז מעגל חסום, אז הקטעים ממרכז המעגל החסום לקודקודים חוצים את זוויות המשולש. לפעמים זוהי בניית עזר מתבקשת.

3. במשולש ישר-זווית שזוויותיו החדות הן $30°$ ו- $60°$: הניצב שמול זווית ה- $30°$ שווה למחצית היתר.

שימו לב! לפעמים כדאי לסמן את הצלע מול ה-$30°$ ב- x ואת היתר ב- 2x ולהתחיל ב"ריצה" עם x בשאר הצלעות.

וההפוך: - אם במשולש ישר-זווית אחד מהניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה שווה ל- $30°$.

4. התיכון ליתר במשולש ישר-זווית שווה למחצית היתר.

וההפוך:- משולש שבו אחד מהתיכונים שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר-זווית (הזווית שמול הצלע הנ"ל היא 90°).

5. כל שני תיכונים במשולש מחלקים זה את זה לשני קטעים כך שהקטע הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהקטע הקרוב לצלע.
שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

6. קטע אמצעים במשולש המחבר אמצעי שתי צלעות מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.

וההפוך:- קטע במשולש היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לצלע השלישית, חוצה את הצלע השניה.

הפוך נוסף: - קטע המחבר שתי נקודות הנמצאות על שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע שלישית ושווה למחציתה – הוא קטע אמצעים.

7. שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

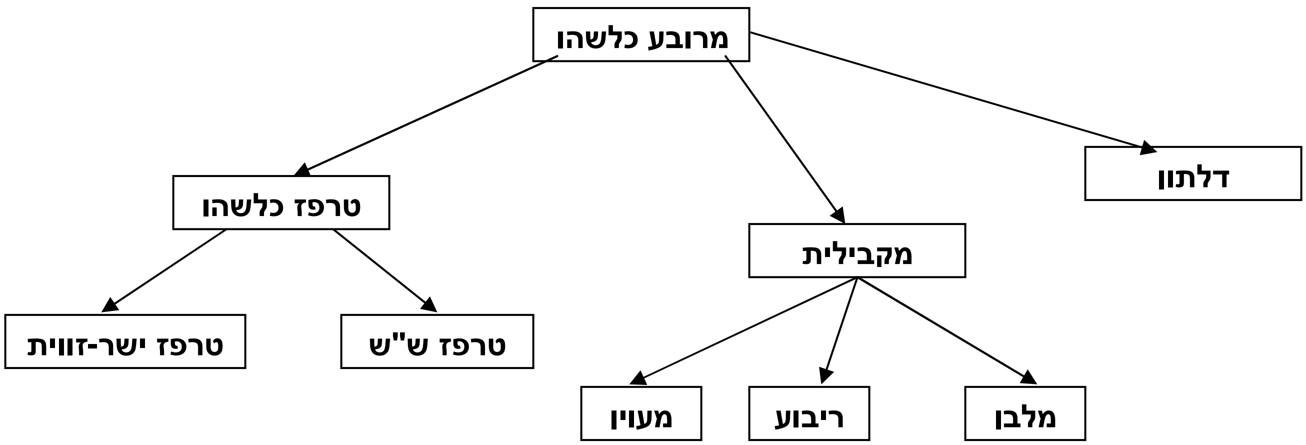
8. שימו לב! כאמור, במשולש, הגבהים, התיכונים, חוצי הזוויות והאנכים האמצעיים נפגשים בנקודה (ולא באותה נקודה).

<u>רק במשולש שווה-צלעות, נקודת המפגש של כולם תהיה אותה נקודה</u>!

לפעמים, כאשר נתונה בשאלה נקודת מפגש של שניים מהגבהים/תיכונים/חוצי-זוויות/אנכים אמצעיים כדאי להשתמש בבניית עזר ולהעביר דרך נקודה זו גם את הקו השלישי.

<u>מרובעים - משפטים נבחרים</u>

<u>המרובעים</u>



1. <u>כללי</u>

א. חשוב מאד להכיר את תכונות המקבילית ואת המשפטים הקשורים בה. זהו הבסיס לצורות הנוספות – מלבן, ריבוע, מעוין.

ב. כאשר מבקשים להוכיח שמרובע למשל הוא מעוין, נצטרך, בדרך-כלל, להוכיח קודם כל שהוא מקבילית ובנוסף להוכיח תכונה המייחדת אותו כמעוין ואינה קיימת בכל מקבילית.

2. <u>תכונות המקבילית</u>:

א. כל שתי זוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.

ב. מרובע שכל שתי זוויות נגדיות שלו שוות זו לזו הוא מקבילית.

ג. כל שתי צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.

ד. מרובע שכל שתי צלעות נגדיות שלו שוות זו לזו הוא מקבילית.

ה. האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה. <u>משפט חשוב ושימושי</u>

ו. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית. <u>משפט חשוב ושימושי</u>

ז. מרובע ששתיים מצלעותיו הנגדיות גם שוות וגם מקבילות הוא מקבילית. <u>משפט חשוב ושימושי</u>

3. <u>תכונות המלבן</u>:

א. המלבן הוא מקבילית בעלת זווית ישרה.

ב. האלכסונים במלבן שווים זה לזה.

ג. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

4. <u>תכונות המעוין</u>:

א. מקבילית בעלת שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
ב. מרובע שכל צלעותיו שוות הוא מעוין.
ג. אלכסוני המעוין חוצים את זוויות המעוין.
ד. מקבילית שבה אלכסון אחד חוצה זווית אחת הוא מעוין.
ה. אלכסוני המעוין מאונכים זה לזה.
ו. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

5. <u>תכונות הריבוע</u>.

א. מעוין בעל זווית ישרה הוא ריבוע.
ב. מלבן בעל שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
ג. מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות הוא ריבוע.

6. <u>הטרפז</u>:

<u>הגדרה</u>:- מרובע שבו רק זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות נקרא טרפז.

<u>שימו לב</u>:-

א. על- מנת להוכיח שמרובע הוא טרפז, יש להוכיח, בהתאם להגדרה ,שזוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות <u>וגם</u> שהזוג השני של הצלעות הנגדיות <u>אינו</u> מקביל (בדרך כלל שוכחים להתייחס לזוג השני של הצלעות ועל כך יכולות לרדת נקודות).
ב. במקום להוכיח שהזוג השני של הצלעות אינו מקביל ניתן גם להוכיח כי הבסיסים של המרובע מקבילים אך <u>שונים</u> כיוון שבטרפז הבסיסים לא יכולים להיות שווים (אחרת זו תהיה מקבילית).
ג. סכום הזוויות ליד כל שוק בטרפז שווה ל- 180° (חד צדדיות),
לעומת זאת, סכום זוויות הבסיס בטרפז <u>אינו</u> שווה ל- 180°.

<u>תכונות טרפז שווה שוקיים</u>:

א. זוויות הבסיס בטרפז שווה שוקיים שוות זו לזו.
ב. טרפז שבו זוויות הבסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
ג. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
ד. טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

<u>קטע אמצעים בטרפז</u>:

א. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
ב. קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים חוצה את השוק השנייה.

<u>המעגל – משפטים נבחרים</u>

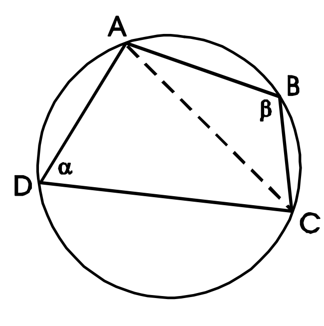
1. למיתרים שווים מתאימות זוויות מרכזיות שוות.
2. לזוויות מרכזיות שוות מתאימים מיתרים שווים.
3. אנך מהמרכז למיתר במעגל חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה ואת הקשת המתאימה.
4. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.
5. הזווית המרכזית במעגל גדולה פי שתיים מכל זווית היקפית הנשענת על אותה קשת.

והמסקנות ממשפט זה הן:-
א. כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו.
ב. זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- $90°$.
ג. זווית היקפית בת $90°$ נשענת על קוטר.

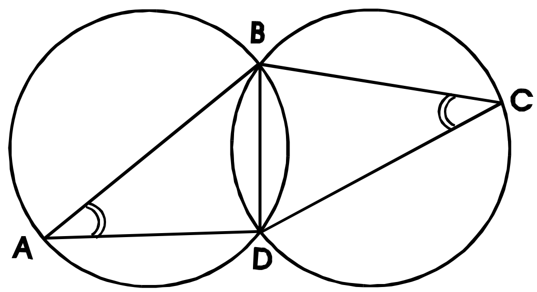
6. זוויות היקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים.
7. על מיתרים שווים נשענות זוויות היקפיות שוות. (ראה "שימו-לב" א')
8. זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות.
9. על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות.

<u>שימו לב!</u>

א. שתי הזוויות ההיקפיות שבשרטוט α ו- β נשענות על המיתר AC <u>אך אינן נשענות על אותה קשת ולכן אינן שוות.</u>
(במקרה זה סכומן הוא $180°$ בהתאם למשפט מרובע חסום במעגל).



ב. כאשר שני מעגלים <u>בעלי אותו רדיוס</u> (זהים) נחתכים ולהם מיתר משותף, ניתן להתייחס לזוויות ההיקפיות הנשענות על המיתר בשני המעגלים כזוויות שוות:
$\sphericalangle A = \sphericalangle C$ (שתי הזוויות ההיקפיות נשענות על הקשתות הקטנות שבשני המעגלים)



10. <u>משיק למעגל</u>

א. הזווית בין משיק לרדיוס (ולקוטר), הנפגשים בנקודת ההשקה, שווה ל- $90°$.
ב. ישר המאונך לרדיוס בקצהו, משיק למעגל.
ג. שני משיקים למעגל, היוצאים מאותה נקודה, שווים זה לזה.
ד. הקטע המחבר את מרכז המעגל עם הנקודה ממנה יוצאים שני המשיקים במעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים. (חוצה גם את הזווית המרכזית).

ה. <u>זווית בין משיק למיתר</u> (משפט זה הוא משפט שמותר לציין בנימוק את שמו בלבד)

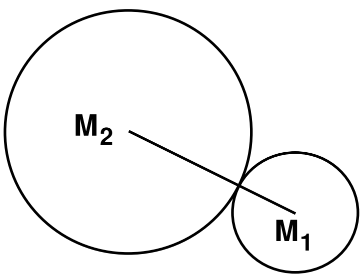
הזווית בין משיק למיתר הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני.

ו. נקודת המגע של שני מעגלים משיקים נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו.

<u>שימו לב</u>!

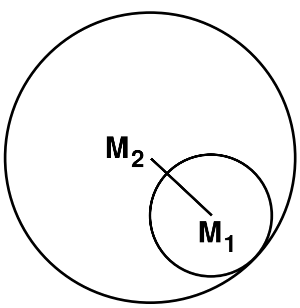
1. כאשר ההשקה מבחוץ, קטע המרכזים שווה לסכום הרדיוסים.

$$\overline{M_1M_2} = R_1 + R_2$$



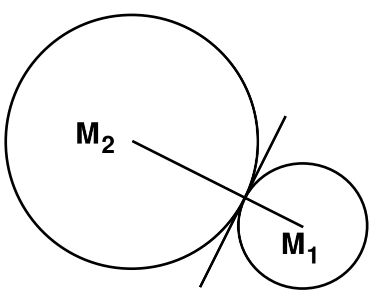
2. כאשר ההשקה מבפנים, קטע המרכזים שווה להפרש הרדיוסים.

$$\overline{M_1M_2} = R_2 - R_1$$



<u>שימו לב</u>! נקודת המגע נמצאת על המשכו של קטע המרכזים.

3. בנקודת המגע של שני מעגלים משיקים יש משיק משותף לשני המעגלים ולכן מומלץ, לפעמים, שבניית העזר תהיה העברת המשיק המשותף – זה יאפשר למצוא את הזוויות בין משיק למיתר.



11. מרובע חסום במעגל

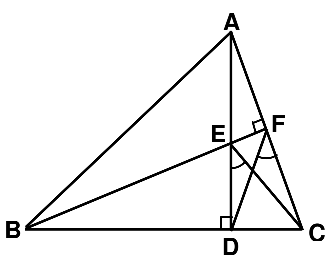
א. בכל מרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות שווה ל- °180.
ב. אם במרובע יש זוג אחד של זוויות נגדיות, שסכומן °180, אז ניתן לחסום אותו במעגל (המרובע בר-חסימה).

שימו לב!

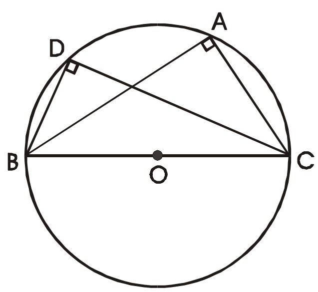
1. בדרך-כלל, ניסוח השאלה יהיה:
"הוכח שאת המרובע ABCD ניתן לחסום במעגל" או "הוכח שמרובע ABCD הוא בר-חסימה". משמעותם של שני הניסוחים זהה.
דרך הפתרון:- למצוא זוג אחד (בלבד) של זוויות נגדיות שסכומן °180.

2. לפעמים, יש להוכיח שוויון בין שתי זוויות וקשה למצוא את הפתרון לכך:
נסו לחפש מעגל חוסם למרובע המכיל את קודקודי הזוויות ולשרטט אותו - אולי תוכלו דרך זוויות היקפיות שוות למצוא את הפתרון.

לדוגמא - "הוכח $\sphericalangle DEC = \sphericalangle DFC$".
חיסמו במעגל את מרובע DEFC...



3. על אותו רעיון, כאשר בשאלה יש שני משולשים ישרי-זווית, בעלי יתר משותף, ניתן לחסום אותם במעגל שמרכזו אמצע היתר ולשרטט אותו - אולי תוכלו דרך זוויות היקפיות שוות למצוא את הפתרון.



4. אם במרובע כל ארבעת האנכים האמצעיים לצלעות המרובע נפגשים בנקודה אחת, אז הנקודה היא מרכז המעגל החוסם (אנך אמצעי הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מקצות הקטע שווה).

12. <u>מרובע חוסם מעגל</u>

א. במרובע חוסם מעגל סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.
ב. אם במרובע סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני, אז אפשר לחסום מעגל במרובע.

<u>שימו לב!</u>
מכל קודקוד של המרובע יוצאים שני משיקים שווים עד לנקודות ההשקה.

ג. כאשר טרפז חוסם מעגל הזווית AOB שווה ל- 90°.

ד. מרכז המעגל החסום במרובע הוא מפגש ארבעת חוצי הזוויות של המרובע (חוצה זווית הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהשוקיים שווה).

13. <u>מצולע משוכלל</u>

<u>הגדרה</u>: מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו שוות, וכל זוויותיו שוות.

א. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל (המעגל חוסם את המצולע).
ב. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל (המעגל חסום ע"י המצולע).

שטחים – משפטים נבחרים

יחידות השטח הן: סמ"ר, מ"ר וכו'. כאשר אין יחידות בשאלה, יש לרשום "יחידות שטח".

1. **שטח המלבן שווה למכפלת צלע אחת בצלע השניה.** $S = a \cdot b$
   היקף המלבן הוא:- $P = 2(a+b)$

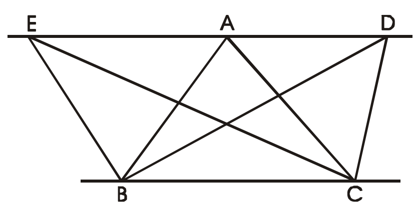
2. **שטח ריבוע שווה למכפלת צלע הריבוע בעצמה.** $S = a^2$
   היקף הריבוע הוא:- $P = 4a$

3. **שטח מקבילית שווה למכפלת צלע בגובה שלה.** $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$
   (שימו לב! למקבילית שתי צלעות שונות ולכן יש גם שני גבהים שונים).
   היקף המקבילית הוא:- $P = 2(a+b)$

4. **<u>שטח משולש שווה למחצית המכפלה של צלע בגובה שלה</u>.** $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$
   (h_a - הגובה לצלע a)
   היקף המשולש הוא:- $P = a + b + c$

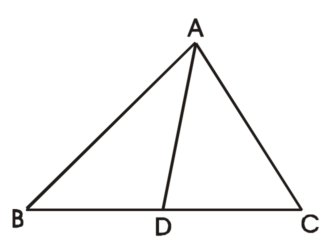
מקרים מיוחדים:

א. משולשים בעלי בסיס משותף ושהקודקוד השלישי שלהם נמצא על ישר המקביל לבסיס משותף זה, הם בעלי שטחים שווים.



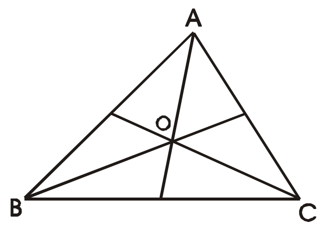
בין שני ישרים מקבילים עוברים אנכים (גבהים) שווים ולכן לשלושת המשולשים אותו הגובה וגם אותו הבסיס BC ומכאן: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta EBC} = S_{\Delta DBC}$.

ב. התיכון במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.

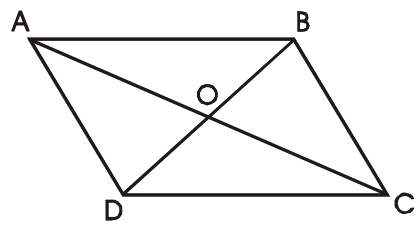


לשני המשולשים שנוצרו אותו גודל בסיס BD = DC וגובה משותף ומכאן נובע שהשטחים שלהם שווים: $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta DAC}$

ג. שלושת התיכונים במשולש מחלקים אותו לשישה משולשים שווי שטח.



ד. האלכסונים במקבילית מחלקים אותה לארבעה משולשים שווי שטח.
ניתן לראות את BO כתיכון במשולש ABC.



<u>שימו לב!</u>
שטחים שווים <u>אין פירושו</u> משולשים חופפים, אך למשולשים חופפים – שטחים שווים.

5. <u>דרכים נוספות למציאת שטח משולש</u>:

א. שטח משולש שווה למכפלת <u>מחצית</u> ההיקף של המשולש ברדיוס המעגל החסום במשולש: $S = p \cdot r$

כאשר: $p = \frac{a+b+c}{2}$ **(<u>מחצית</u> היקף המשולש) ו- r הוא רדיוס המעגל החסום.**

ב. שטח משולש באמצעות הצלעות a, b, c (נוסחת הרון) :

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **(p <u>מחצית</u> היקף המשולש)**

6. שטח טרפז שווה למחצית המכפלה של סכום הבסיסים בגובה. $S = \frac{(a+b)h}{2}$

7. שטח מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה שווה למחצית מכפלת האלכסונים זה בזה:

$$S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$$

(מעוין, ריבוע ודלתון הינם מרובעים שאלכסוניהם מאונכים זה לזה).

8. שטח עיגול (S) שרדיוסו R ניתן על-ידי הנוסחא: $S = \pi R^2$

9. היקף מעגל (P) שרדיוסו R ניתן על-ידי הנוסחא: $P = 2\pi R$

שימו לב!

בשאלות בנושא שטחים כאשר מבקשים להוכיח שוויון בין שני שטחים, מומלץ:

א. לבדוק מאילו צורות הנדסיות מורכב כל שטח ולחפש צורות משותפות לשני השטחים ואז ניתן לפשט את הבעיה ולהוכיח את "מה שנשאר".

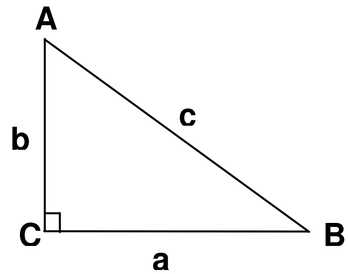
ב. לחפש צלעות שוות/בסיסים שווים.

ג. לחפש גבהים שווים ובעיקר בין ישרים מקבילים.

<u>משפט פיתגורס</u>

(משפט זה הוא משפט שמותר לציין בנימוק את שמו בלבד)

בכל משולש ישר-זווית סכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

<u>שימו לב!</u>

היתר בריבוע (הצלע הגדולה במשולש) שווה לסכום ריבועי הניצבים (הצלעות הקטנות יותר במשולש).

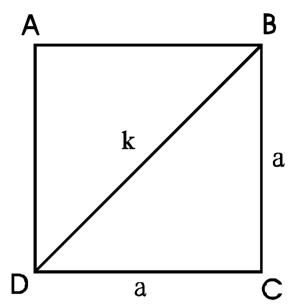
<u>משפט הפוך למשפט פיתגורס:</u>

אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית אז המשולש הוא ישר-זווית. (הזווית הישרה מול הצלע הגדולה).

<u>שימושים אחדים במשפט פיתגורס:</u>

1. <u>מציאת אורך אלכסון של ריבוע</u>:

משפט פיתגורס במשולש BDC

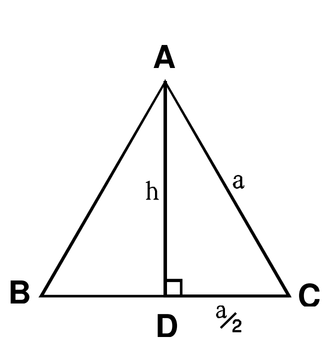


$$k^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$k = a\sqrt{2}$$

2. <u>מציאת גובה במשולש שווה צלעות</u>

משפט פיתגורס במשולש ADC



$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

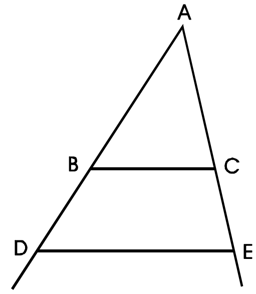
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

<u>שימו לב!</u> בשתי הדוגמאות שלעיל הבהרנו על איזה משולש חל משפט פיתגורס – נא הקפידו לעשות זאת – זה נדרש בבחינות ומאפשר לכם ולבוחן מעקב טוב יותר אחר מהלך הפתרון.

<u>פרופורציה ודמיון – משפטים נבחרים</u>

1. **<u>משפט תאלס</u> (משפט זה הוא משפט שמותר לציין בנימוק את שמו בלבד)**

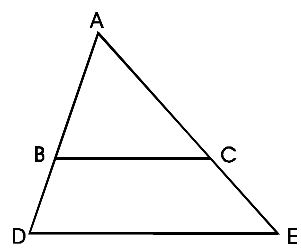
שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים.



$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

א. <u>למשפט תאלס יש שתי הרחבות- הרחבה א' והרחבה ב'</u>:

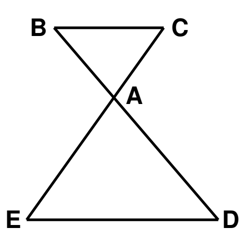
בהרחבה א' משתמשים כאשר רוצים להתייחס לצלעות האופקיות המקבילות BC, DE.



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

על-מנת לזכור ביתר קלות: "צלע במשולש הקטן חלקי צלע בהתאמה במשולש הגדול"

בהרחבה ב' משתמשים כאשר יש צורה של "שעון חול": ED ו BC



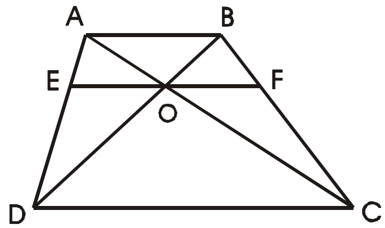
$$\frac{BA}{AD} = \frac{CA}{AE} = \frac{BC}{ED}$$

על-מנת לזכור ביתר קלות: "צלע חלקי ההמשך שלה"

ב. ניתן לשלב בין משפט תאלס והרחבותיו.

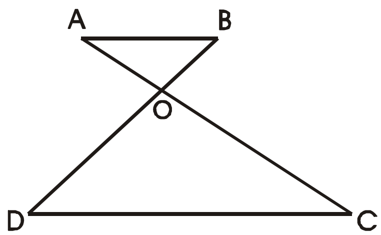
ג. כאשר נתונה שאלה בפרופורציה ודמיון, יש לחפש בשרטוט את "שוקי הזווית" ואת "שעון החול".

לדוגמא:
נתון טרפז ונתון ש:- AB וו EF

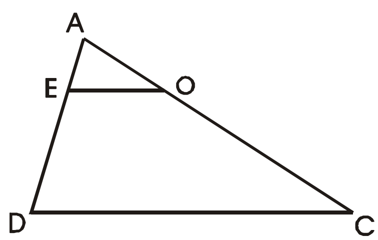


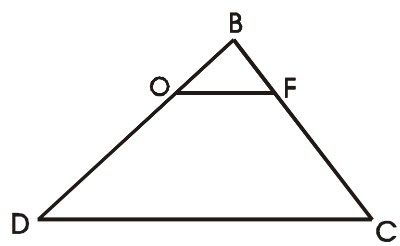
להבהרה, "נוציא" את "שעון החול" ו"שוקי הזווית" מהשרטוט:

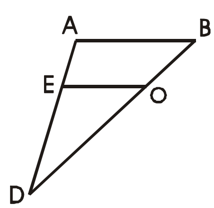
<u>"שעון חול"</u>

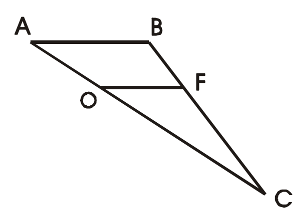


<u>"שוקי הזווית"</u>







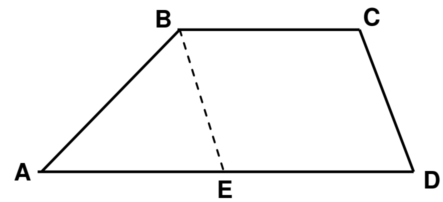


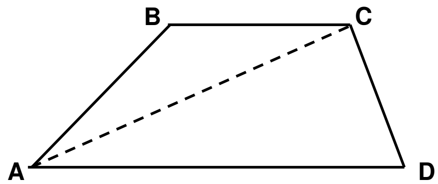
<u>שימו לב!</u>

כאשר משתמשים בצלעות האופקיות המקבילות EO, FO, יש להשתמש בהרחבה א'.

לדוגמא: במשולש BDC מתקיים $\frac{BO}{BD}=\frac{FO}{CD}$.

ד. בניות עזר שיש להכיר הן:
1) הפיכת טרפז למקבילית ומשולש על-ידי העברת קו מקביל לאחת השוקיים: CD ו BE
וכעת יש "שוקי זווית".
2) העברת האלכסון AC וכעת יש "שוקי זווית".





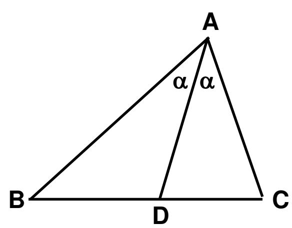
2. <u>משפט הפוך למשפט תאלס:</u> (משפט זה הוא משפט שמותר לציין בנימוק את שמו בלבד)

שני ישרים המקצים על שוקי זווית קטעים פרופורציוניים מקבילים זה לזה.

3. <u>משפט חוצה הזווית</u> (משפט זה הוא משפט שמותר לציין בנימוק את שמו בלבד)

חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים המתייחסים זה לזה כמו היחס שבין שתי הצלעות הכולאות את הזווית.

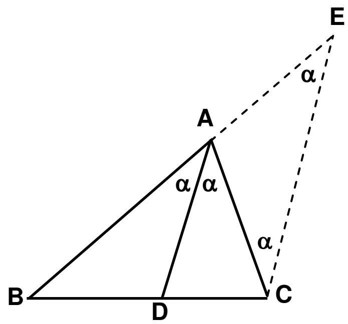
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$



א. יש לשים לב לכיוון:- אם בחרתם קטע שמאל (BD) חלקי קטע ימין (DC), אז גם בין הצלעות הכולאות את הזווית יש לבחור צלע שמאל (AB) חלקי צלע ימין (AC).
(אותו סדר/כיוון).

ב. כאשר בשאלה מופיעה המילה "חוצה זווית" – אמורה <u>"להידלק אצלכם נורה"</u> –
כלומר, אולי אפשר להשתמש במשפט חוצה הזווית.

ג. יש לדעת להוכיח את משפט חוצה הזווית!
הרעיון – מעבירים כבניית עזר קו CE המקביל לחוצה הזווית AD, מוכיחים ש- AC = AE בעזרת זוויות מתאימות ומתחלפות (משולש ACE שווה שוקיים) ומשתמשים במשפט תאלס במשולש BEC:



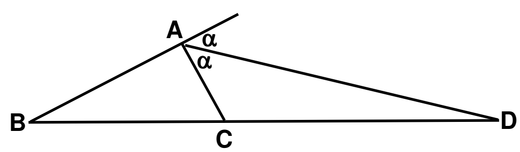
$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$ **ולכן:** $$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$$

4. <u>משפט הפוך למשפט חוצה הזווית</u>

קטע המחבר קודקוד במשולש עם הצלע שמולו ומחלק אותה לשני קטעים המתייחסים זה לזה כמו היחס שבין שתי הצלעות האחרות – חוצה את זווית המשולש.

5. <u>משפט חוצה זווית חיצונית</u>

חוצה זווית חיצונית למשולש מחלק את הצלע שמול הזווית הפנימית כך, שהיחס בין הקטע המכיל את הצלע והמשכה, לבין המשכה של הצלע שווה ליחס שבין הצלעות הכולאות את הזווית הפנימית.



$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$$

<u>שימו לב!</u>
הנקודה D "יצאה החוצה" (ממשולש ABC) אך הנוסחא היא אותה נוסחא של חוצה זווית פנימית במשולש ולכן קל לזכור אותה.
על-מנת להוכיח את משפט חוצה זווית חיצונית מעבירים כבניית עזר קו CE המקביל לחוצה הזווית AD (כמו שעשינו בהוכחת משפט חוצה זווית פנימית).

6. <u>משפט הפוך למשפט חוצה זווית חיצונית</u>

ישר העובר דרך קודקוד של משולש ומחלק את הצלע שמול הקודקוד חלוקה חיצונית ביחס השווה ליחס שבין שתי הצלעות האחרות – חוצה את הזווית החיצונית שליד הקודקוד.

משולשים דומים

הגדרה:
שני משולשים נקראים דומים אם שלוש הזוויות שלהם שוות בהתאמה וקיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות המתאימות.

שימו לב!
ישר המקביל לצלע של משולש חותך ממנו משולש הדומה לו.

1. משפטי הדמיון (השימושיים)

א. משפט דמיון צ.ז.צ. – אם בשני משולשים קיים יחס שווה בין שני זוגות צלעות מתאימות והזווית שביניהן שווה בהתאמה אז המשולשים דומים.

ב. משפט דמיון ז.ז. – אם בשני משולשים שוות בהתאמה שתי זווית אז המשולשים דומים. (כאמור, יש להתייחס גם לזווית השלישית מילולית או מתמטית).

ג. משפט דמיון צ.צ.צ – אם בשני משולשים קיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות המתאימות, אז המשולשים דומים.

2. קטעים מתאימים במשולשים דומים

הגבהים, ההיקפים, חוצי הזוויות, התיכונים, הרדיוסים של מעגלים החוסמים, הרדיוסים של מעגלים החסומים במשולשים דומים – מתייחסים זה לזה כיחס הצלעות המתאימות.

3. שטחי משולשים דומים

השטחים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כריבוע היחס שבין הצלעות המתאימות.

שימו לב!
כשמדובר ביחס השטחים ההתייחסות היא כריבוע יחס הצלעות המתאימות.
כשמדובר בקטעים ההתייחסות היא כיחס הצלעות המתאימות.

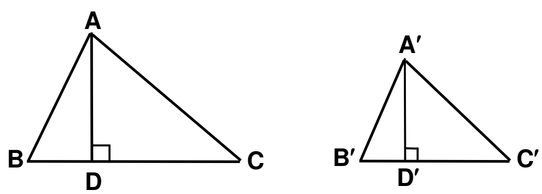
4. יש לדעת להוכיח את המשפטים בנושא קטעים מתאימים במשולשים דומים ושטחי משולשים דומים (סעיפים 2 ו-3 לעיל).

זיכרו! - לכל הוכחת משפט יש לשרטט <u>שרטוט נפרד</u>.

<u>דוגמאות</u>:

א. "הוכח שבמשולשים דומים יחס הגבהים הוא כיחס הצלעות המתאימות".

נתון: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
AD, $A'D'$ גבהים.



צ"ל: $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AC}{A'C'}$

<u>הוכחה</u>:

1) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (נתון)

2) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ (במשולשים דומים קיים יחס שווה בין הצלעות המתאימות – לפי 1).

3) $\measuredangle C = \measuredangle C'$ (במשולשים דומים הזוויות שוות בהתאמה - לפי 1).

4) $\measuredangle ADC = \measuredangle A'D'C' = 90^\circ$ (נתונים גבהים).

5) $\measuredangle CAD = \measuredangle C'A'D'$ (הזווית השלישית משלימה ל- 180° – וזו ההתייחסות לזווית השלישית).

6) $\Delta ADC \sim \Delta A'D'C'$ (לפי משפט דמיון ז.ז. ולפי 3, 4) .

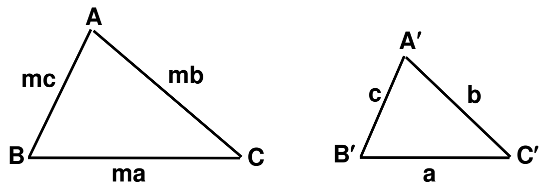
7) $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AC}{A'C'}$ (במשולשים דומים קיים יחס שווה בין הצלעות המתאימות - לפי 6).

8) מ.ש.ל.

ב. "הוכח שבמשולשים דומים יחס ההיקפים הוא כיחס שבין הצלעות המתאימות".

נתון: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

צ"ל: $\dfrac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A'B'C'}} = \dfrac{BC}{B'C'}$



<u>הוכחה</u>:

1) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (נתון)

2) <u>נסמן</u>:
m - יחס הפרופורציה (הדמיון)
P - היקף משולש

3) $m = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{AB}{A'B'}$ (במשולשים דומים קיים יחס שווה בין הצלעות המתאימות - לפי 1).

4) $P_{\Delta ABC} = BC + AC + AB$ (היקף משולש ABC).

5) $P_{\Delta A'B'C'} = B'C' + A'C' + A'B'$ (היקף משולש $A'B'C'$).

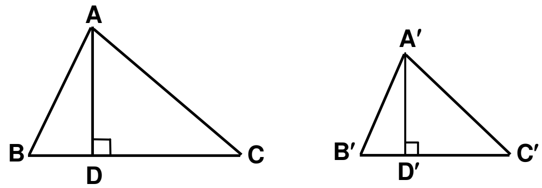
6) $P_{\Delta ABC} = ma + mb + mc = m(a+b+c) = m \cdot P_{\Delta A'B'C'}$ (לפי 3, 4, 5).

7) $\dfrac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A'B'C'}} = m$ (לפי 6).

8) $\dfrac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A'B'C'}} = m = \dfrac{BC}{B'C'}$ (לפי 3, 7).

9) מ.ש.ל.

ג. "הוכח שבמשולשים דומים יחס השטחים הוא כריבוע היחס שבין הצלעות המתאימות".



נתון: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

צ"ל: $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\dfrac{BC}{B'C'}\right)^2$

<u>הוכחה:</u>

1) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (נתון)

2) <u>נסמן:</u>

m - יחס הפרופורציה

AD ו- $A'D'$ - גבהים (כבניית עזר).

3) $m = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{AB}{A'B'}$ (במשולשים דומים קיים יחס שווה בין הצלעות המתאימות - לפי 1).

4) $m = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AD}{A'D'}$ (במשולשים דומים יחס הגבהים הוא כיחס הצלעות המתאימות - לפי 1).

5) $\dfrac{B'C' \cdot A'D'}{2} = S_{\triangle A'B'C'}$ (שטח משולש $A'B'C'$).

6) לפי 3, 4, 5 נקבל:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{(m \cdot B'C')(m \cdot A'D')}{2} = \frac{m^2(B'C' \cdot A'D')}{2} = m^2 \cdot S_{\triangle A'B'C'}$$

7) $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = m^2$ (לפי 6).

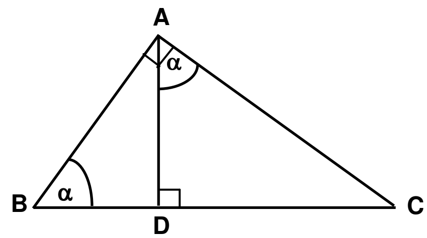
8) $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\dfrac{BC}{B'C'}\right)^2$ (לפי 3 ו-7).

9) מ.ש.ל.

פרופורציה במשולש ישר-זווית – משפטים

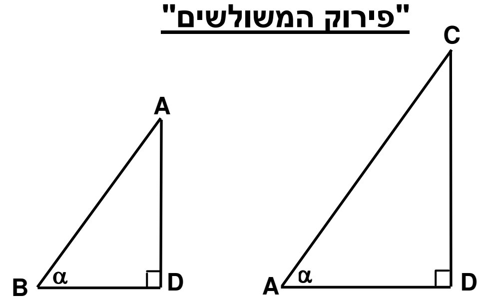
הוכחת המשפטים הבאים תעשה בעזרת משפט דמיון ז.ז. (ובעזרת פירוק המשולשים)

1. הגובה ליתר במשולש ישר-זווית מחלק את המשולש לשני משולשים דומים שכל אחד מהם דומה למשולש המקורי. (לכל שלושת המשולשים הקיימים יש זווית ישרה וזווית α)



2. הגובה ליתר במשולש ישר-זווית הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

"פירוק המשולשים"

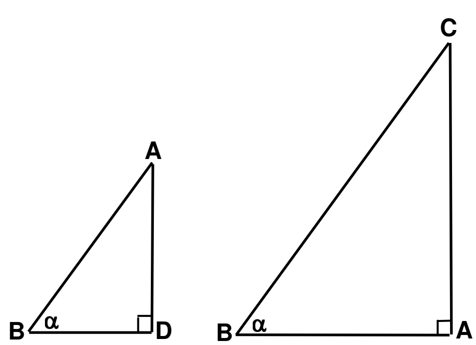


ולכן: $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$

$$\boxed{AD^2 = BD \cdot DC}$$

3. משפט הפוך למשפט 2:
אם הגובה לאחת הצלעות במשולש הוא הממוצע ההנדסי של היטלי שתי הצלעות האחרות, אז המשולש ישר-זווית.

4. ניצב במשולש ישר-זווית הוא הממוצע ההנדסי של היתר והיטלו של ניצב זה על היתר.



ולכן: $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$

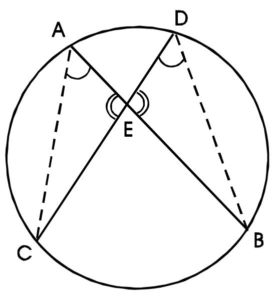
$$\boxed{AB^2 = BD \cdot BC}$$

<u>פרופורציה במעגל – משפטים</u>

קיימים שלושה משפטים בנושא זה ויש לדעת להוכיח משפטים אלה.
ההוכחה נעשית <u>באמצעות משפט דמיון ז.ז</u>. ובעזרת פירוק המשולשים (כאן מובאות התשובות הסופיות בלבד). בניות העזר להוכחת המשפטים משורטטות בקווקוו.

1. <u>שני מיתרים הנחתכים במעגל</u>

שני מיתרים הנחתכים במעגל, מחלקים זה את זה כך שמכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.



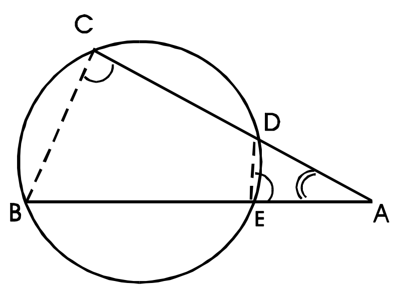
הוכחת המשפט מסתמכת על זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות וזוויות קודקודיות שוות.

$\triangle DBE \sim \triangle ACE$ ולכן אחרי הפירוק: $\underline{AE \cdot EB = DE \cdot EC}$

הערה:
אם שני קטעים נחתכים ומכפלת חלקי הקטע האחד שווה למכפלת חלקי הקטע האחר, אז ניתן להעביר מעגל דרך ארבעת קצות שני הקטעים. (בנקודות C, B, D, A)

2. <u>שני חותכים למעגל</u>

אם למעגל יוצאים שני חותכים מאותה נקודה אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

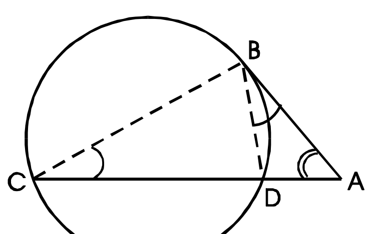


הוכחת המשפט מסתמכת על מרובע חסום במעגל.

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ולכן אחרי הפירוק: $\underline{AD \cdot AC = AE \cdot AB}$

3. <u>חותך ומשיק</u>

אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני זהו גודל קבוע ושווה לריבוע המשיק.
(התוצאה תהיה קבועה לכל החותכים היוצאים מנקודה A למעגל)



הוכחת המשפט מסתמכת על זווית בין משיק למיתר.

$\triangle ABD \sim \triangle ACB$ ולכן אחרי הפירוק: $\underline{AB^2 = AD \cdot AC}$

הערה:
מוצא החותך בנקודה מחוץ למעגל, והוא חייב לחתוך את המעגל בשתי נקודות.
במידה ויש קטע שאינו חותך את המעגל בשתי נקודות ניתן להאריך אותו כך שיהפוך לחותך.

משל על משפטים ודמיון (ולא משפטי דמיון..)

דמיינו לכם צייד שיוצא לציד לבוש ב"חליפת מגן" ועל גבו שק מלא חיצים.
הצייד רואה מטרה – המטרה נייחת (לזמן קצוב). הצייד בוחר את החץ הנכון והמתאים לפגיעה במטרה.
לפעמים, על-מנת ל"חסל" את המטרה עליו להשתמש בכמה חיצים בו-זמנית.

הצייד הוא כל אחד מכם, התלמידים,
חליפת המגן היא הידע שרכשתם במשך השנים,
החיצים שבשק הם המשפטים/הנימוקים בגיאומטריה,
והמטרה היא כל שאלה שאתם נדרשים לפתור.

ככל שתתרגלו את הפגיעה במטרות, כך יהיה לכם קל יותר לזהות ולמשוך מהשק את החצים/המשפטים המתאימים והפגיעה במטרות – פתרון השאלות - תהיה קלה יותר, מדוייקת יותר ומהירה יותר (יש לכם זמן קצוב לפתרון כל שאלה).

בהצלחה בציד ובבחינות!

כעת אתם יכולים וצריכים לדרוש מעצמכם יותר

בהצלחה!!!