סיכום חקירת משוואות מהמעלה הראשונה ומהמעלה השנייה

פרק זה הינו חלק מסיכום כולל לשאלון 005 שנכתב על-ידי מאיר בכור

1. חקירת משוואה מהמעלה הראשונה עם נעלם אחד

הצורה הנורמלית של המשוואה, אליה יש להגיע, היא: $ax = b$

א. כאשר $a \neq 0$ יש למשוואה פתרון יחיד והוא: $x = \frac{b}{a}$.

ב. כאשר $a = 0$ וגם $b \neq 0$ אין פתרון למשוואה.

ג. כאשר $a = 0$ וגם $b = 0$ יש למשוואה אינסוף פתרונות.

בנוסף לסעיפים הנ"ל יש לקחת בחשבון את תחום ההגדרה של המשוואה המקורית, במידה וקיים. לדוגמא:

$mx = \frac{3-3x}{m}$ לסעיף א': $m \neq 0$ לסעיף ב': $m = 0$.

2. חקירת מערכת משוואות מהמעלה הראשונה עם שני נעלמים

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

דרך א':-

בעזרת שיטת ההצבה או בעזרת שיטת השוואת מקדמים נגיע לצורה הנורמלית של משוואה מהמעלה הראשונה $ax = b$ ואותה נחקור בהתאם לסעיף 1.
במידה ותהיה דרישה, יש למצוא את x וגם את y (הפתרון).

דרך ב':-

היחסים בין המקדמים של שתי המשוואות:

כאשר $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ יש פתרון יחיד למערכת.

כאשר $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ אין פתרון למערכת.

כאשר $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ יש אינסוף פתרונות למערכת.

הקשר בין הפתרון האלגברי לגרפי:

כאשר יש פתרון יחיד של המערכת – הישרים הנ"ל נחתכים בנקודה אחת ולהיפך.
כאשר אין פתרון למערכת – הישרים הנ"ל מקבילים ולהיפך.
כאשר יש אינסוף פתרונות למערכת– הישרים הנ"ל מתלכדים ולהיפך.

3. חקירת משוואה מהמעלה השנייה (ריבועית) מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$

א. כאשר $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ וגם יש למשוואה **שני שורשים ממשיים** שונים.

ב. כאשר $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ וגם יש למשוואה **שורש ממשי אחד** (שני השורשים מתלכדים).

ג. כאשר $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ וגם **אין** למשוואה שורשים ממשיים.

כאשר שואלים לאילו ערכי m אין למשוואה שורשים ממשיים:-

א. יש לסדר את הפרבולה כך שיהיה מקדם ל- x^2 , מקדם ל- x ואיבר חופשי.

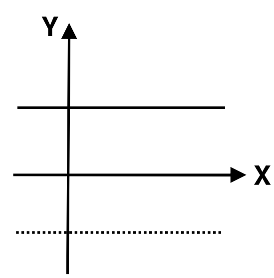
ב. לבדוק את הקו הישר $a=0$ (אחרי הצבת הפרמטר יש לקבל ביטוי **ללא** x)

ג. לבדוק את הפרבולה כשהתנאים הם: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ וגם

ד. פתרון סופי יהיה מערכת "או" בין הפתרונות של סעיף ב' וסעיף ג'.

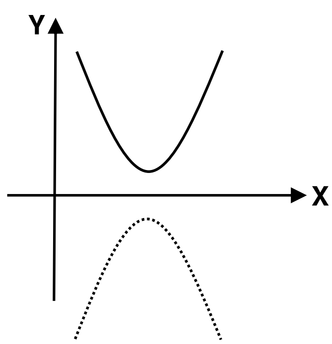
הסבר מבחינה גרפית:

הקו הישר



הערה: הקוים המקווקוים הם גם אופציה לפתרון

הפרבולה

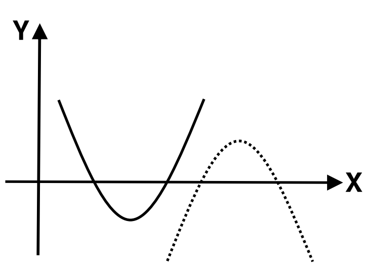


כאשר שואלים לאילו ערכי m יש למשוואה שני שורשים ממשיים שונים:-

א. יש לסדר את הפרבולה.

ב. **אין** בדיקת קו ישר (כי רוצים שני שורשים).

ג. לבדוק את הפרבולה כשהתנאים הם: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ וגם



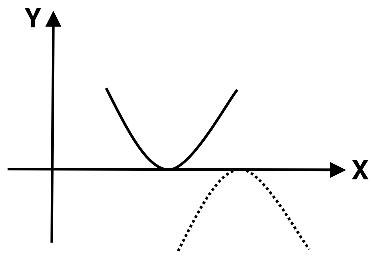
<u>כאשר שואלים לאילו ערכי m שני השורשים מתלכדים:-</u>

א. יש לסדר את הפרבולה.

ב. <u>אין</u> בדיקת קו ישר (מניסוח השאלה – רוצים משוואה ממעלה שניה בלבד).

ג. לבדוק את הפרבולה כשהתנאים הם: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ **וגם**

<u>הסבר מבחינה גרפית:</u>



<u>כאשר שואלים לאילו ערכי m יש לגרף הפונקציה ולציר ה- x נקודת אחת משותפת:-</u>

א. יש לסדר את הפרבולה.

ב. לבדוק את הקו הישר $a = 0$ (אחרי הצבת הפרמטר יש לקבל ביטוי <u>עם</u> x ואת x יש למצוא)

ג. בדיקת הפרבולה כשהתנאים הם: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ **וגם**

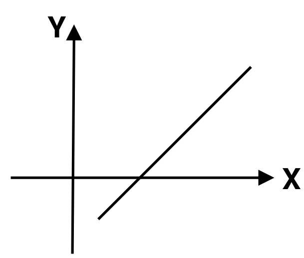
ד. פתרון סופי יהיה מערכת "או" בין הפתרונות של סעיף ב' וסעיף ג'.

הנקודה המשותפת לפרבולה ולציר ה- x תהיה בנקודה שבה: $x = -\dfrac{b}{2a}$.

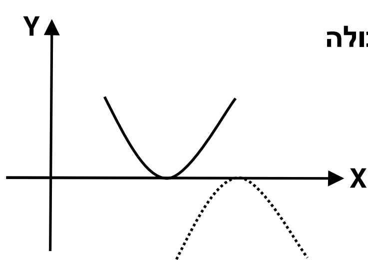
x יתקבל כפונקציה של m. נציב את m שהתקבל מסעיף ג' ונקבל את x, או שניתן להציב את m במשוואה ולפתור בהתאם. יתקבל רק פתרון אחד ל- x – כצפוי.

<u>מבחינה גרפית:</u>

הקו הישר



הפרבולה



<u>שימו לב</u>: כאשר אנו דורשים $a \neq 0$ הכוונה היא שמדובר בפרבולה והיא יכולה להיות "בוכה" ($a < 0$) או "צוחקת" ($a > 0$) העיקר לא קו ישר.

4. <u>"שיטת התמיד"</u>

במשוואה פרמטרית מהמעלה השנייה, כאשר שואלים:

<u>עבור אילו ערכי m אי-השיוויון מתקיים לכל ערך של x (כלומר תמיד):-</u>

א. יש לסדר את הפרבולה כך שיהיה מקדם ל- x^2 , מקדם ל- x ואיבר חופשי.

ב. לבדוק את הקו הישר $a=0$ (אחרי הצבת הפרמטר יש לקבל ביטוי נכון שתמיד מתקיים <u>ללא</u> x)

ג. לבדוק את הפרבולה בהתאם לצורת אי-השוויון (ראו פירוט להלן).

ד. פתרון סופי יהיה מערכת "או" בין הפתרונות של סעיף ב' וסעיף ג'.

1) אי-השוויון מהצורה $ax^2+bx+c>0$ מתקיים עבור כל ערך של x (תמיד)

כאשר התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') הם: $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ וגם.

2) אי-השוויון מהצורה $ax^2+bx+c<0$ מתקיים עבור כל ערך של x (תמיד)

כאשר התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') הם: $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ וגם.

3) אי-השוויון מהצורה $ax^2+bx+c\geq 0$ מתקיים עבור כל ערך של x (תמיד)

כאשר התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') הם: $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$ וגם.

4) אי-השוויון מהצורה $ax^2+bx+c\leq 0$ מתקיים עבור כל ערך של x (תמיד)

כאשר התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') הם: $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$ וגם.

<u>הערה:</u>
ב"שיטת התמיד" ניתן לפתור גם תרגילים בנוסח: עבור אילו ערכים של m גדולה הפונקציה $f(x)$ מהפונקציה $g(x)$ לכל ערך של x (תמיד)?

5. "שיטת הקודקוד"

א. קודקוד הפרבולה נמצא בנקודה $\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ c-\frac{b^2}{4a}\right)$ או $\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

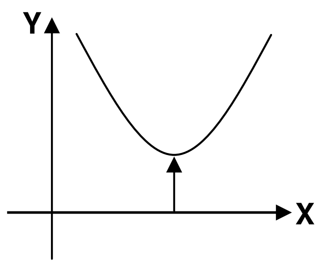
ב. בשיטה זו, סעיפים א', ב', ד', זהים ל"שיטת התמיד" למעט סעיף ג' שבו משתמשים ב- y של הקודקוד כאחד התנאים לדוגמא:

1) כאשר שואלים מתי אי-השוויון מהצורה $ax^2+bx+c>0$ מתקיים תמיד,
או כאשר שואלים מתי הפרבולה נמצאת כולה מעל לציר ה- x.

התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') לפי "שיטת הקודקוד" הם:

$\begin{cases} y_{\text{קודקוד}} > 0 \\ a > 0 \end{cases}$ וגם

ומבחינה גרפית:

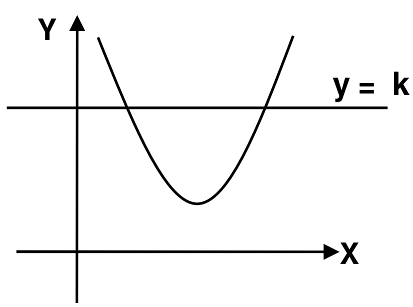


(הפרבולה "צוחקת" וה- y של הקודקוד נמצא מעל ציר ה- x).

2) כאשר שואלים:
מתי הפרבולה נמצאת כולה מעל לציר ה- x וחותכת קו מסויים y = k בשתי נקודות שונות, התנאים לבדיקת הפרבולה (סעיף ג') לפי "שיטת הקודקוד" הם:

$\begin{cases} 0 < y_{\text{קודקוד}} < k \\ a > 0 \end{cases}$ וגם

ומבחינה גרפית:



את השאלה הנ"ל ניתן לפתור גם בדרך אחרת - לפצל את הדרך לפתרון לשני שלבים:

א. הפרבולה נמצאת כולה מעל ציר ה- x (כלומר – תמיד) -
נפתור שלב זה ב"שיטת התמיד" והתנאים לכך הם: - $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ וגם

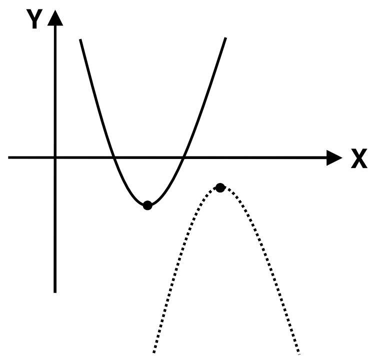
ב. הפרבולה חותכת את הקו y = k בשתי נקודות שונות (לפרבולה שני שורשים) -

נשווה בין הפרבולה לקו הישר ונקבל: $f(x)=k \leftarrow f(x)-k=0$

והתנאים לכך הם: $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta^*>0 \end{cases}$ וגם (הדיסקרימיננטה כאן שונה מזו שבסעיף א'!)

ג. הפתרון הסופי יתקבל על-ידי ביצוע "וגם" בין פתרונות הסעיפים א' ו-ב'.

3) **כאשר שואלים <u>עבור אילו ערכים של m גרף הפונקציה הוא פרבולה שקודקודה נמצא ברביע מסויים</u> –**
לדוגמא: ברביע ה- IV, התנאים לכך הם:-



$a \neq 0$
$x > 0$ קודקוד
$y < 0$ קודקוד

וגם ומבחינה גרפית

6. <u>תזכורת לגבי "בדיקת הקו הישר" – מספר דוגמאות</u>

א) כאשר שואלים: מצא לאילו ערכי m אי-השיוויונים מתקיימים לכל ערך של x.

<u>דוגמא 1</u>:- $mx^2 - mx + 8 > 0$

כאשר $a = 0$ נקבל $m = 0$

נציב $m = 0$ באי- השיוויון ונקבל:- $0x^2 - 0x + 8 > 0$ **כלומר $8 > 0$ תמיד.**

מסקנה: כאשר $m = 0$ לכל ערך של x אי-השיוויון תמיד חיובי וזה מתאים לתנאי השאלה ולכן $m = 0$ הוא פתרון של הקו הישר.

<u>דוגמא 2</u>:- $(m^2 - 1)x^2 - 5mx + 3 > 0$

כאשר $a = 0$ נקבל $m^2 - 1 = 0$ והפתרונות הם: $m = 1$, $m = -1$.

נציב את הפתרון הראשון $m = 1$ באי-השיוויון ונקבל: $0x^2 - 5x + 3 > 0$ **כלומר** $x < \frac{3}{5}$.

מסקנה: $m = 1$ אינו מתאים לתנאי השאלה כיוון שרוצים שאי-השיוויון יתקיים תמיד, לכל ערך של x , ולא רק קטן מ- $\frac{3}{5}$.

נציב את הפתרון השני $m = -1$ באי השיוויון ונקבל: $0x^2 + 5x + 3 > 0$ **כלומר** $x > -\frac{3}{5}$.

מסקנה: $m = -1$ אינו מתאים לתנאי השאלה כיוון שרוצים שאי-השיוויון יתקיים תמיד, לכל ערך של x , ולא רק גדול מ- $-\frac{3}{5}$.

בדוגמא זו אין פתרון ל"בדיקת הקו הישר".

דוגמא 3:- $\left(m^2-m-2\right)x^2+\left(m-2\right)x-4<0$

כאשר $a = 0$ נקבל: $m^2-m-2=0$ והפתרונות הם: $m = 2$, $m = -1$.

נציב את הפתרון הראשון $m = 2$ באי השיוויון ונקבל: $0x^2+0x-4<0$ כלומר $-4<0$.

מסקנה: (-4) תמיד קטן מאפס ולכן $m = 2$ מתאים לתנאי השאלה והוא פתרון לקו הישר.

נציב את הפתרון השני $m = -1$ באי השיוויון ונקבל: $0x^2-3x-4<0$ כלומר $x>-\frac{4}{3}$.

מסקנה: $m = -1$ אינו מתאים לתנאי השאלה ואינו פתרון לקו הישר.

ב) כאשר שואלים לאילו ערכי m יש לגרף הפונקציה ולציר ה- x נקודה אחת משותפת:

דוגמא 1:- $y=\left(m-5\right)x^2+3m-8$

כאשר $a = 0$ נקבל: $m-5=0$ והפתרון הוא: $m = 5$.

נציב $m= 5$ בפונקציה ונקבל: $y=0x^2+15-8$ כלומר $y = 7$.

מסקנה: $m = 5$ אינו מתאים לתנאי השאלה כיוון ש- $y = 7$ הוא קו מקביל לציר ה- x ואין נקודת חיתוך עם ציר ה- x.

דוגמא 2:- $y=\left(m-1\right)x^2+2mx+7$

כאשר $a = 0$ נקבל: $m - 1 = 0$ והפתרון הוא: $m = 1$.

נציב $m = 1$ בפונקציה ונקבל: $y=0x^2+2x+7$ כלומר $y = 2x + 7$.

מסקנה: $m = 1$ מתאים לתנאי השאלה מכיוון שהישר $y = 2x + 7$ חותך את ציר ה- x בנקודה (-3.5 , 0).

ג) כאשר שואלים לאילו ערכי m אין לגרף הפונקציה ולציר ה- x אף נקודה משותפת:

<u>דוגמא</u>:- $y=(m-5)x^2+3m-8$

כאשר $a = 0$ נקבל: $m-5=0$ והפתרון הוא: $m = 5$.

נציב $m= 5$ בפונקציה ונקבל: $y=0x^2+15-8$ כלומר $y = 7$.

מסקנה: $m = 5$ מתאים לתנאי השאלה כיוון ש- $y = 7$ הוא קו מקביל לציר ה- x ואין נקודת חיתוך עם ציר ה- x.

<u>שימו לב</u>!

בסעיפים ב' ו-ג' לעיל נעשה שימוש באותה דוגמא על-מנת להמחיש כמה חשוב לקרוא את נוסח השאלה ולהבין את סוג השאלה –

זה מה שיקבע לאיזו מסקנה תגיעו: אותו הפתרון אינו מתאים לסוג אחד של שאלה אך מתאים לסוג השני.

7. <u>דוגמא לשאלה ופתרונה בשתי השיטות – "שיטת התמיד" ו"שיטת הקודקוד"</u>
(כל אחד מכם יכול לבחור בשיטה הנוחה לו.)

מומלץ לשרטט לפני תחילת הפתרון על-מנת לראות את "תמונת השאלה" ואת התנאים המתאימים לה.

<u>השאלה</u>:-

מצא לאילו ערכים של m נמצא גרף הפונקציה: -

$$f(x)=(m-1)x^2+2(m+1)x+m+9$$

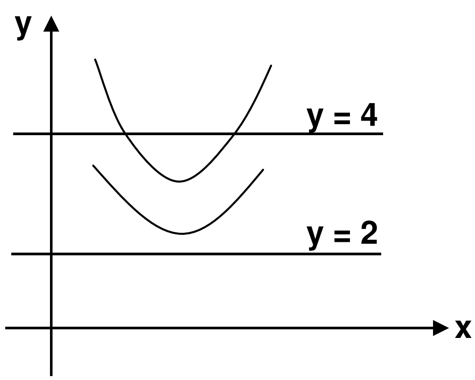
כולו מעל לקו (הישר) $y = 2$ וחותך את הקו (הישר) $y = 4$ בשתי נקודות שונות.

<u>הפתרון</u>:-

א. ברור שאין צורך בבדיקת קו ישר כי הפונקציה צריכה לחתוך את הישר $y = 4$ בשתי נקודות, ולכן הפונקציה היא רק פרבולה.

ב. הפרבולה חייבת להיות "צוחקת" כיוון שמתנאי השאלה היא <u>כולה מעל</u> הישר $y = 2$.

ג. עכשיו נשרטט את "תמונת השאלה":-



<u>דרך א' – פתרון ב"שיטת הקודקוד":</u>

ראשית נרשום את התנאים:

$$\begin{cases} a>0 \\ 2<-\dfrac{\Delta}{4a}<4 \end{cases} \qquad \text{וגם} \begin{cases} a>0 \\ 2<y_{\text{קודקוד}}<4 \end{cases}$$

וכעת נציב:

$$\text{וגם} \begin{cases} m-1>0 \\ 2<\dfrac{-\left[4(m+1)^2-4(m-1)(m+9)\right]}{4(m-1)}<4 \end{cases}$$

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ 2 < \dfrac{-\left[4\left(m^2+2m+1\right)-4\left(m^2+9m-m-9\right)\right]}{4(m-1)} < 4 \end{cases}$$

נצמצם ב- 4 ונקבל: -

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ 2 < \dfrac{-\left[m^2+2m+1-m^2-9m+m+9\right]}{m-1} < 4 \end{cases}$$

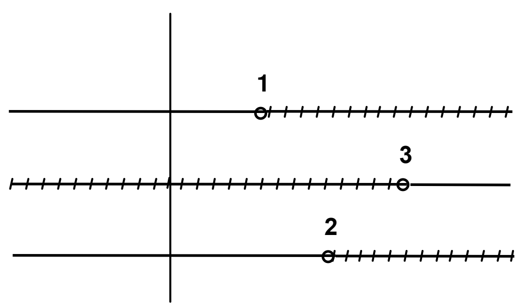
$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ 2 < \dfrac{-(-6m+10)}{m-1} < 4 \end{cases}$$

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ 2 < \dfrac{-(-6m+10)}{m-1} < 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} m > 1 \\ \dfrac{6m-10}{m-1} < 4 \\ \dfrac{6m-10}{m-1} > 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m > 1 \\ \dfrac{6m-10}{m-1} - 4 < 0 \\ \dfrac{6m-10}{m-1} - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\[2ex] \dfrac{6m - 10 - 4(m-1)}{m-1} < 0 \\[2ex] \dfrac{6m - 10 - 2(m-1)}{m-1} > 0 \end{cases} \qquad \text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\[2ex] \dfrac{2m - 6}{m-1} < 0 \\[2ex] \dfrac{4m - 8}{m-1} > 0 \end{cases}$$

היות והמכנה חיובי (m – 1 > 0) אז ניתן "לוותר" עליו ולקבל:-

$$\text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ 2m - 6 < 0 \\ 4m - 8 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{וגם}\begin{cases} m > 1 \\ m < 3 \\ m > 2 \end{cases}$$



פתרון סופי לשאלה – מערכת "וגם" (האזור המשותף לכל שלישיית אי-השיוויונים):

$$\boxed{2 < m < 3}$$

<u>דרך ב' – פתרון ב"שיטת התמיד":-</u>

נפצל את הפתרון לשניים:
כאשר הפרבולה מעל הקו $y = 2$ <u>וגם</u> כאשר הפרבולה חותכת את הקו $y = 4$ בשתי נקודות שונות. (כאמור אין צורך בבדיקת הקו הישר)

א. הפרבולה מעל הישר $y = 2$ תמיד, כלומר:- $(m-1)x^2+2(m+1)x+m+9>2$

נסדר את אי-השיוויון ונקבל: $(m-1)x^2+2(m+1)x+m+7>0$

והתנאים לכך שאי השיוויון יהיה תמיד חיובי הם:-

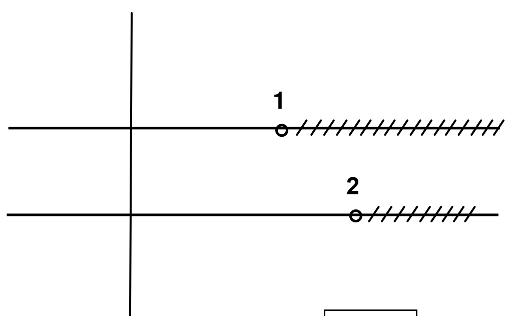
$$\begin{cases} m-1>0 \\ 4(m+1)^2-4(m-1)(m+7)<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases} \text{וגם}$$

נצמצם ב-4 ונקבל:-

$$\begin{cases} m-1>0 \\ \left(m^2+2m+1\right)-\left(m^2+7m-m-7\right)<0 \end{cases} \text{וגם}$$

$$\begin{cases} m>1 \\ m-2>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m>1 \\ -4m+8<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m>1 \\ m^2+2m+1-m^2-7m+m+7<0 \end{cases} \text{וגם}$$

$$\begin{cases} m>1 \\ m>2 \end{cases} \text{וגם}$$



$$\boxed{m>2}$$

ב. חיתוך הפונקציה $f(x)=(m-1)x^2+2(m+1)x+m+9$ עם הקו $y = 4$ בשתי נקודות (כך מוצאים נקודות חיתוך בין שתי פונקציות – פתרון אלגברי):

נשווה בין שתי הפונקציות $(m-1)x^2+2(m+1)x+m+9=4$ **ונקבל:**

$$(m-1)x^2+2(m+1)x+m+5=0$$

התנאים לכך שיהיו שני שורשים שונים (חיתוך בשתי נקודות) הם:-

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \text{ וגם}$$

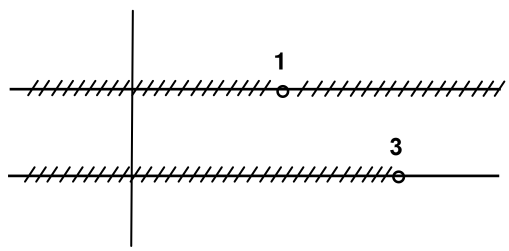
$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ 4\left(m+1\right)^2 - 4\left(m-1\right)\left(m+5\right) > 0 \end{cases} \text{ וגם}$$

נצמצם ב- 4 ונקבל:-

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 + 2m + 1 - \left(m^2 + 5m - m - 5 \right) > 0 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 + 2m + 1 - m^2 - 5m + m + 5 > 0 \end{cases} \text{ וגם} \qquad \begin{cases} m \neq 1 \\ -2m + 6 > 0 \end{cases} \text{ וגם} \qquad \begin{cases} m \neq 1 \\ m - 3 < 0 \end{cases} \text{ וגם}$$

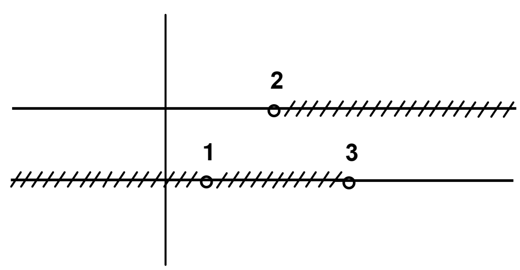
$$\begin{cases} m \neq 1 \\ m < 3 \end{cases} \text{ וגם}$$



$\underline{m \neq 1}$ וגם $\underline{m < 3}$

ג. פתרון סופי של השאלה יהיה מערכת "וגם" בין סעיפים א' ו- ב':-

$$\begin{cases} m > 2 \\ m \neq 1 \text{ וגם } m < 3 \end{cases} \text{ וגם}$$



$\boxed{2 < m < 3}$

<u>שימו לב</u>:-
הדיסקרימיננטות בשתי השיטות <u>שונות</u> ובכל זאת קבלנו אותה התוצאה (כצפוי).

מאד חשוב לשים לב <u>לניסוח השאלה</u> – האם מדובר על פרבולה או על משוואה או על גרף הפונקציה. כאשר מדובר בפרבולה אין בדיקת קו ישר.

8. מושגים נוספים בהם אתם יכולים "להיתקל":

א. "נקודה משותפת שאינה תלויה ב- m " (דוגמא לשאלה מבחינת בגרות):

נתונות הפונקציות: $f(x)=3x^2-(3m-2)x+m$

$g(x)=1$

1) הראה כי ל- $f(x)$ ול- $g(x)$ יש נקודה משותפת שאינה תלויה ב- m .

2) מצא עבור אילו ערכים של m יש ל- $f(x)$ ול- $g(x)$ שתי נקודות משותפות.

פתרון:

1) נמצא את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות:

$$3x^2-(3m-2)x+m=1$$

$$3x^2-(3m-2)x+m-1=0$$

נפתור את המשוואה הריבועית:

$$x_{1,2}=\frac{(3m-2)\pm\sqrt{9m^2-12m+4-12(m-1)}}{6}$$

$$x_{1,2}=\frac{(3m-2)\pm\sqrt{9m^2-24m+16}}{6}$$

$$x_{1,2}=\frac{(3m-2)\pm\sqrt{(3m-4)^2}}{6}$$

$$x_1=\frac{(3m-2)+(3m-4)}{6}=m-1 \quad , \quad x_2=\frac{(3m-2)-(3m-4)}{6}=\frac{1}{3}$$

ולכן הנקודה המשותפת שאינה תלויה ב- m היא: $\left(\frac{1}{3},1\right)$.

2) שתי נקודות משותפות פירושו – ששתי הנקודות לא תתלכדנה ולכן:

$$m-1\neq\frac{1}{3} \Rightarrow m\neq\frac{4}{3}$$

(ניתן לפתור גם באמצעות $\Delta>0$, במקרה שלנו $(3m-4)^2>0$).

ב. <u>"משפחת הפונקציות"</u> (גם שאלה מבחינת בגרות):

נתונה משפחת הפונקציות: $y=\left(m^2-5m\right)x^2-(m-5)x-1$.

מצא ערך של m שעבורו גרף הפונקציה הוא קו ישר המקביל לציר ה- x.

פתרון:

$$a=0 \;\Rightarrow\; m^2-5m=0 \;\Rightarrow\; m_1=0\;,\; m_2=5$$

נציב $m_1=0$ בפונקציה ונקבל: $y=5x-1$, לא מתאים לתנאי השאלה (אינו מקביל לציר ה- x).

נציב $m_2=5$ בפונקציה ונקבל: $y=-1$, מתאים לתנאי השאלה (מקביל לציר ה- x) ולכן התשובה תהיה: $m=5$.

9. נוסחאות ווייטה

קשר בין המקדמים $a\ ,\ b\ ,\ c$ של המשוואה הריבועית לשורשים $x_1\ ,\ x_2$ של המשוואה:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad\qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

שימושים של נוסחאות ווייטה

א. מציאת משוואה ריבועית כאשר נתונים השורשים שלה (מומלץ להניח $a=1$ בשלב הראשון).

ב. כאשר נתונה משוואה ריבועית שהשורשים שלה הם $\alpha\ ,\ \beta$ ורוצים למצוא משוואה ריבועית חדשה שהשורשים שלה כפונקציה של α ו- β.

יש לזכור את הזהות $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)$.

ג. כאשר נתונה משוואה ריבועית עם פרמטר ונתון אחד השורשים או קשר בין השורשים.

ד. כאשר יש דרישה לסימני השורשים (חיוביים, שליליים, שווי סימן, שוני סימן).

> הרעיון בכתיבת התנאים –
> כל מה שידוע בוודאות לגבי סכום השורשים ומכפלת השורשים – נכנס לתנאים!

לדוגמא:-

כאשר שואלים לגבי שני שורשים חיוביים, בנוסף לתנאים "הרגילים" $\left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{array}\right.$ וגם

יש להוסיף בנוסחאות ווייטה את $-\frac{b}{a}>0$ (ידוע שסכום שני מספרים חיוביים גם הוא חיובי)

ואת התנאי $\frac{c}{a}>0$ (ידוע שמכפלת שני מספרים חיוביים גם היא חיובית).

יוצא שיש לבצע מערכת "וגם" של ארבעה אי-שיוויונים:

$$\left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ -\frac{b}{a}>0 \\ \frac{c}{a}>0 \end{array}\right.$$ וגם

ה. כאשר יש דרישה לשימוש עם ערך מוחלט – לדוגמא:
התנאים ששני השורשים יהיו שוני סימן והשורש <u>בעל הערך המוחלט הגדול יותר</u> יהיה השורש החיובי.

וגם $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$

ו. בשאלונים מתקדמים יותר (007) -
למשל, בהנדסה אנליטית כאשר נתונה נקודת האמצע של קטע ניתן להשתמש
בנוסחאות ווייטה בדרך הבאה: $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ (ולמצוא את שיפוע הקטע / הישר)

<u>ניסוח אחר לגבי סימני השורשים:-</u>

מצא לאילו ערכי m חותכת הפונקציה את ציר ה- x בשתי נקודות הנמצאות:

א. משני צידי הראשית $\leftrightarrow$ שני שורשים ממשיים שונים בעלי <u>סימנים מנוגדים</u>.
ב. באותו צד של הראשית $\leftrightarrow$ שני שורשים ממשיים שונים בעלי <u>סימנים שווים</u>.
ג. מימין לראשית $\leftrightarrow$ שני שורשים ממשיים שונים <u>חיוביים</u>.
ד. משמאל לראשית $\leftrightarrow$ שני שורשים ממשיים שונים <u>שליליים</u>.

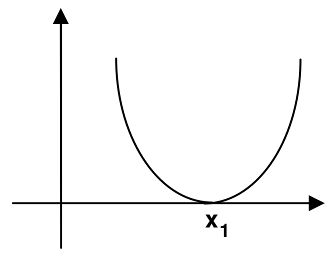
<u>סיכום התנאים ששני שורשי המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ הם:-</u>

<u>שוני סימן</u>	<u>שווי סימן</u>	<u>שניהם חיוביים</u>	<u>שניהם שליליים</u>
$a \neq 0$ $\Delta > 0$ $\frac{c}{a} < 0$ במקרה זה ניתן לוותר על התנאי של $\Delta > 0$	$a \neq 0$ $\Delta > 0$ $\frac{c}{a} > 0$	$a \neq 0$ $\Delta > 0$ $\frac{c}{a} > 0$ $-\frac{b}{a} > 0$	$a \neq 0$ $\Delta > 0$ $\frac{c}{a} > 0$ $-\frac{b}{a} < 0$

<u>דוגמא לשימוש בנוסחאות וייטה</u>

נתונה משוואה ריבועית עם פרמטר ויש צורך למצוא עבור אילו ערכים של m יש למשוואה <u>לפחות</u> שורש ממשי <u>אחד חיובי</u>. פתרון גרפי והתנאים המתאימים לו:

א. שורש אחד חיובי - פרבולה

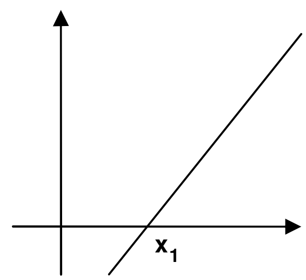


וגם $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

x_1 חייב להיות בצד ימין של הראשית על -מנת שיהיה חיובי

$$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

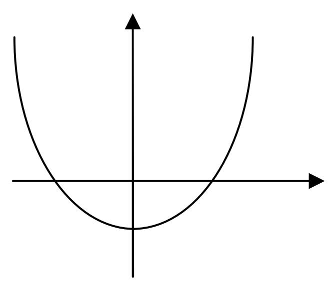
ב. שורש אחד חיובי – הקו הישר



$$a = 0$$

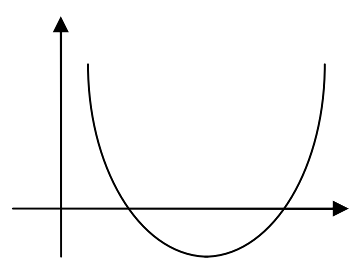
x_1 חייב להיות בצד ימין של הראשית על-מנת שיהיה חיובי

ג. שורש אחד חיובי – פרבולה (השני שלילי)



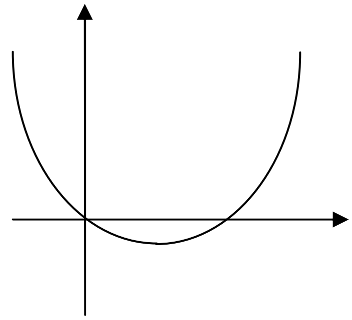
וגם $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$

ד. שני שורשים חיוביים – פרבולה



וגם $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

ה. שורש אחד חיובי – פרבולה (השורש השני שווה אפס)



וגם $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases}$

הפתרון הסופי יהיה מערכת "או" בין הפתרונות של חמשת האפשרויות שלעיל.