נתונות שתי הפונקציות:

$f(x)=(m-1)x^2-4mx+4m+4$ **ו-** $g(x)=2x-m-3$.

א. לאילו ערכים של m **יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודה משותפת אחת בלבד:**

נשווה את הפונקציות ונמצא את התנאים הנדאשים לפתרון אחד.

$$(m-1)x^2-4mx+4m+4=2x-m-3$$
$$(m-1)x^2-4mx-2x+4m+4+m+3=0$$
$$(m-1)x^2-2(2m+1)x+5m+7=0$$
$$a=m-1,\quad b=-2(2m+1),\quad c=5m+7$$

<u>מקרה הישר (משוואה ממעלה ראשונה)</u>

$a=0$ **, כלומר** $m=1$

נציב $m=1$ **ונקבל:**

$$(1-1)x^2-2(2\cdot1+1)x+5\cdot1+7=0$$
$$-6x+12=0$$
,

כלומר יש פתרון $(x=2)$

לכן, $m=1$ **עונה לתנאי השאלה**

<u>מקרה הפרבולה (משוואה ממעלה שנייה)</u>

התנאים הנדרשים הם:

$a\neq0$ **(מעלה שנייה), כלומר:** $m\neq1$

$\Delta=0$ **(פתרון אחד בלבד)**

$$\Delta=b^2-4ac<0$$
$$(-2(2m+1))^2-4\cdot(m-1)(5m+7)=0$$
$$4((2m+1)^2-(m-1)(5m+7)=0$$
$$4(4m^2+4m+1-5m^2-7m+5m+7)=0$$
$$\boxed{4(-m^2+2m+8)=0}$$
$$-m^2+2m+8=0$$
$$m_{1,2}=\frac{-2\pm6}{-2}$$
$$\boxed{m_1=-2,\quad m_2=4}$$

תשובה מאוחדת: $m=4$ **או** $m=1$ **או** $m=-2$

ב. יש למצוא לאילו ערכים של m יש לגרפים של הפונקציות שתי נקודות משותפות, שכל אחת נמצאת בצד אחד של ציר ה- y .

נדרוש $a \neq 0$, כלומר $m \neq 1$, לצורך קבלת שני פתרונות.

שתי נקודות, בצד אחר של ציר ה- y, הן שני שורשים שוני סימן, לכן: $\frac{c}{a} < 0$

אין צורך לבדוק $\Delta > 0$, שכן אם $\frac{c}{a} < 0$ שלילי אז $ac > 0$ ונקבל $\Delta > 0$.

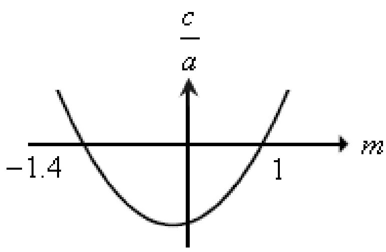
$$\frac{c}{a} < 0$$

$$\frac{5m+7}{m-1} < 0 \quad /\cdot(m-1)^2$$

$$\boxed{(5m+7)(m-1) < 0}$$

והפתרונות הם: 1 או $-\frac{7}{5} = -1.4$

נצייר את הפרבולה המתאימה:



ולכן $-1.4 < m < 1$, תחום אשר כולו, על פי א', של משוואה ריבועית

תשובה: $-1.4 < m < 1$

נכפול את שלושת האיברים שבסדרה,
כאשר נסמן ב- x **את הראשון מביניהם:**

$$x \cdot xq \cdot xq^2 = 125$$
$$x^3 q^3 = 125$$
$$(xq)^3 = 125$$
$$xq = \sqrt[3]{125}$$
$$\boxed{xq = 5}$$

לכן האיבר האמצעי מבין שלושת האיברים העוקבים הוא 5

נביע באמצעותו את שלושת איברי הסדרה: $\frac{5}{q}, 5, 5q$

אם נוסיף 1 **לכל אחד משני המספרים הראשונים ונחסיר** 7 **מהמספר השלישי,**
יתקבלו שלושה מספרים שהם שלושה איברים עוקבים בסדר הנדסית חדשה.

לכן איברי הסדרה החדשה הם: $\frac{5}{q}+1,\ 5+1, 5q-7$ **, או** $\frac{5+q}{q},\ 6, 5q-7$

מכיוון וזו סדרה הנדסית, הרי שמנתה קבועה, ובהתאם $\frac{6}{\frac{5+q}{q}} = \frac{5q-7}{6}$ **:**

נפתור את המשוואה:

$$\frac{5q-7}{6} = \frac{6q}{5+q}$$
$$(5q-7)(5+q) = 36q$$
$$25q + 5q^2 - 35 - 7q = 36q$$
$$5q^2 - 18q - 35 = 0$$
$$q_{1,2} = \frac{18 \pm 32}{10}$$
$$\boxed{q_1 = 5} \quad \boxed{q_2 = -1.4}$$

במקרה שבו $q = 5$ **נקבל ששלושת האיברים הם:** $1, 5, 25$

במקרה שבו $q = -1.4$ **נקבל ששלושת האיברים הם:** $-\frac{25}{7}, 5, -7$

תשובה: $1, 5, 25$ **או** $-\frac{25}{7}, 5, -7$

בגרות סז ינואר 2007 מועד חורף שאלון 35005

<u>נתונים</u>

1. BC **הוא קוטר במעגל שמרכזו** N
2. $ND \perp AB$
3. $DE \parallel BC$

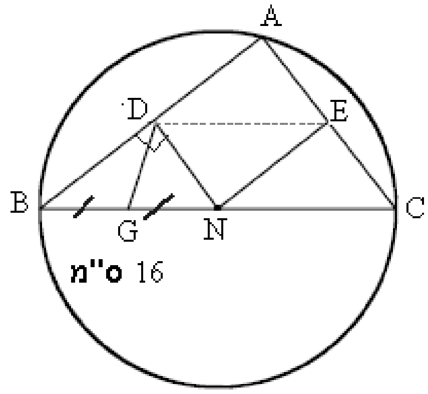
עבור ב

4. **רדיוס המעגל הוא** 16 **ס"מ**
5. **נקודה** G **היא אמצע** BN

צ"ל:

א. $NE \perp AC$

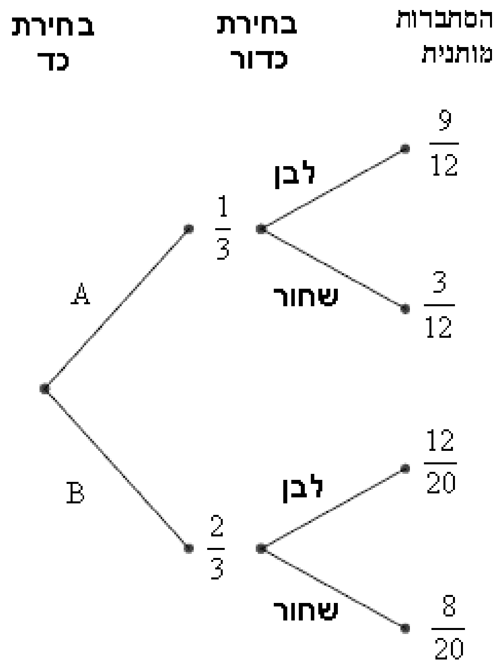
ב. האורך של הקטע DG



<u>הוכחה</u>

הסבר		טענה	נימוק
1	6	N מרכז המעגל	נתון
2	7	$ND \perp AB$	נתון
6,7	8	$BD = AD$	קטע העובר במרכז המעגל ומאונך למיתר – חוצה אותו
3	9	$DE \parallel BC$	נתון
8,9	10	DE קטע אמצעים ב- ΔABC	יוצא מאמצע צלע ומקביל לצלע השלישית
10	11	$CE = AE$	קטע אמצעים חוצה הצלעות
6,11	12	$NE \perp AC$	קטע העובר במרכז המעגל וחוצה מיתר – מאונך לו
		מ.ש.ל. א	
5	13	נקודה G היא אמצע BN	נתון
7,13	14	$DG = \frac{BN}{2}$	תיכון ליתר שווה למחצית היתר
4	15	רדיוס המעגל הוא 16 ס"מ	נתון
6,10	16	BN = 16 ס"מ	רדיוס
14,16	17	DG = 8 ס"מ	חישוב
		מ.ש.ל. ב	

נציג הנתונים על עץ אפשרויות:



כאשר מטילים קוביה הוגנת: ההסתברות שתתקבלנה הספרות 1 **או** 6

היא: $\frac{2}{6}$ **(או** $\frac{1}{3}$**) ובהתאם הסיכוי ששתקבלנה ספרות אחרות הוא** $\frac{2}{3}$

ההסתברויות להוצאת כדור נובעת מהיחס בין מספר הכדורים בצבע מסוים,

לבין מספר הכדורים בכד.

א. נגדיר את המאורעות המתאימים:

A **- בחירת כד** A

$\overline{A}$ **- בחירת כד** B

W **- בחירת כדור לבן**

$\overline{W}$ **- בחירת כדור שחור**

ידוע שהוצא כדור לבן ויש למצוא את ההסתברות שהוצא מכד A **.**

$$P(A/W) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)}$$

נמצא תחילה את ההסתברות להוצאת כדור לבן:

$$P(W) = P(A \cap W) \cup (\overline{A} \cap W)$$

$$P(W) = P(A) \cdot P(W/A) + P(\overline{A}) \cdot P(W/\overline{A})$$

$$P(W) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{12} + \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{20}$$

$$\boxed{P(W) = 0.65}$$

נמצא את ההסתברות לבחירת כד A **וְכדור לבן**

$$P(A \cap W) = P(A) \cdot P(W/A)$$

$$P(A \cap W) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{12}$$

$$\boxed{P(A \cap W) = 0.25}$$

ובהתאם:

$$P(A/W) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)}$$

$$P(A/W) = \frac{0.25}{0.65}$$

$$\boxed{P(A/W) = \frac{5}{13}}$$

תשובה: ההסתברות לבחירת כד A **,**

כאשר ידוע שהוצא כדור לבן היא: $\frac{5}{13}$

ב. חוזרים על הניסוי 5 פעמים:

יש למצוא מהי ההסתברות לבחור לכל היותר 4 פעמים כדור לבן.

יש כאן התפלגות בינומית.

המאורע המשלים הוא : "בחירת 5 פעמים כדור לבן."

בסעיף א' מצאנו כי $P(W) = 0.65$

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P(k) = \binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

כאשר: $p = 0.65 \quad k = 5 \quad n = 5$ **,**

$$P_5(5) = \binom{5}{5}(0.65)^5(1-0.65)^{5-5}$$

$$P_5(5) = \frac{5!}{5!(5-5)!}0.65^5 \cdot 0.35^0$$

$$P_5(5) = 1 \cdot 0.65^5 \cdot 1$$

$$P_5(5) = 0.65^5$$

ובהתאם: ההסתברות למאורע המשלים: $1 - 0.65^5 = 0.8834$

תשובה: ההסתברות לבחור לכל היותר 4 פעמים כדור לבן היא 0.8834

א. נגדיר את המאורעות המתאימים:

A **- קבלת תמונה**

$\overline{\mathrm{A}}$ **- קבלת מספר**

ידוע שההסתברות לקבל תמונה גדולה ב- 50%

מההסתברות לקבל מספר, לכן:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{100\% + 50\%}{100\%} \cdot \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$$

$$\boxed{\mathrm{P(A)} = 1.5 \cdot \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})}$$

מכיוון וסכום ההסתברויות בהטלת מטבע הוא 1

$$\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1$$

$$1.5 \cdot \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1$$

$$2.5 \cdot \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1$$

$$\boxed{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 0.4, \quad \rightarrow \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 0.6}$$

תשובה: ההסתברות לקבלת תמונה היא 0.6

ב. חוזרים על הטלת המטבע 5 **פעמים, או** 15 **פעמים:**

יש למצוא מהי ההסתברות הגבוהה יותר

לקבלת $60\% \cdot 5 = 3$ **מתוך** 5 **נסיונות,**

או לקבלת $60\% \cdot 15 = 9$ **מתוך** 15 **נסיונות**

זו התפלגות בינומית, כאשר בסעיף א' מצאנו כי $\mathrm{P(A)} = 0.6$

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P(k) = \binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

$n=15 \quad k=9 \quad p=0.65$	$n=5 \quad k=3 \quad p=0.65$
$\mathrm{P}_{15}(9) = \binom{15}{9}(0.6)^3(1-0.6)^{5-3}$ $\mathrm{P}_{15}(9) = \frac{15!}{9!(15-9)!}0.6^9 \cdot 0.4^6$ $\mathrm{P}_{15}(9) = 5005 \cdot 0.6^9 \cdot 0.4^6$ $\mathrm{P}_{15}(9) = 0.2066$	$\mathrm{P}_5(3) = \binom{5}{3}(0.6)^3(1-0.6)^{5-3}$ $\mathrm{P}_5(3) = \frac{5!}{3!(5-3)!}0.6^3 \cdot 0.4^2$ $\mathrm{P}_5(3) = 10 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2$ $\mathrm{P}_5(3) = 0.3456$

תשובה: לראשון הסתברות גבוהה יותר לקבלת תמונה.

א. נגדיר את הקבוצות הבאות

S - **קבוצת האופנועים הנבדקים**

A - **קבוצת אופנועים התקינים**

$\overline{A}$ - **קבוצת האופנועים הלא תקינים**

D - **קבוצת האופנועים שהמכון אבחן כתקינים**

(התיאור של אבחנת המכון שיש לבחון את אמינותו)

$\overline{D}$ - **קבוצת האופנועים שהמכון אבחן כלא תקינים**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$P(A) = 0.4 \quad \rightarrow P(\overline{A}) = 0.6$$

$$P(D/A) = 0.85 \quad \rightarrow P(\overline{D}/A) = 0.15$$

$$P(\overline{D}/\overline{A}) = 0.85 \quad \rightarrow P(D/\overline{A}) = 0.15$$

הדיאגנוסטיות של אבחון האופנוע, ע"י המכון" כתקין היא:

$$\frac{P(D/A)}{P(D/\overline{A})} = \frac{0.85}{0.15} = \frac{17}{3}$$

כלומר עוצמת הקשר הסטטיסטי היא $\frac{17}{3}$

נמצא את שיעור הבסיסי

$$\frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{0.4}{0.6} = \frac{2}{3}$$

נמצא את היחס המעודכן

$$R = \frac{P(D/A)}{P(D/\overline{A})} \cdot \frac{P(A)}{P(\overline{A})}$$

$$R = \frac{17}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

$$R = \frac{34}{9}$$

נמצא את ההסתברות שאופנוע שאובחן כתקין, אכן תקין

$$P(A/D) = \frac{R}{1+R}$$

$$P(A/D) = \frac{\frac{34}{9}}{1+\frac{34}{9}}$$

$$P(A/D) = \frac{34}{43} = 0.7907$$

תשובה: ההסתברות שאופנוע שאובחן כתקין, אכן תקין היא 0.7907

ב. נשאל נאיבי, כזה שלא למד "חשיבה הסתברותית בחיי יום יום",

יעריך את ההסתברות שהאופנוע, שאובחן כתקין, אכן תקין היא 0.85 **.**

נשאל כזה טועה ב"כשל השיעור הבסיסי",

כאשר הוא מתעלם מהשיעור הבסיסי של האופנועים התקינים

תשובה: 0.85 **, כשל "השיעור הבסיסי"**

ג. יש למצוא את השיעור הבסיסי, כאשר $P(A/D) = 0.85$

נמצא את היחס המעודכן הנדרש

$$P(A/D) = \frac{R}{1+R}$$

$$0.85 = \frac{R}{1+R}$$

$$0.85 + 0.85R = R$$

$$R = \frac{17}{3}$$

נמצא את השיעור הבסיסי

$$R = \frac{P(D/A)}{P(D/\overline{A})} \cdot \frac{P(A)}{P(\overline{A})}$$

$$\frac{17}{3} = \frac{17}{3} \cdot \frac{P(A)}{P(\overline{A})}$$

$$\frac{P(A)}{P(\overline{A})} = 1$$

כלומר היחס בין האופנועים התקינים ללא תקינים הוא 1**,**

ובהתאם שיעור כל אחד מהם $0.5 = 50\%$

תשובה: שיעור האופנועים התקינים הנדרש הוא 0.5

א. נגדיר את הקבוצות הבאות

S - **קבוצת בוגרי בית הספר שביקשו להיבחר**

A **- קבוצת הנבחרים,** $\overline{A}$ **- קבוצת הלא נבחרים**

B **- קבוצת הבנים,** $\overline{B}$ - **קבוצת הבנות**

C **- קבוצת הלומדים במגמת פיזיקה,** $\overline{C}$ - **קבוצת הלומדים במגמות אחרות**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$N(S) = 400, \quad N(C) = 200, \quad N(\overline{C}) = 200$$
$$N(B \cap C) = 160, \quad N(B \cap \overline{C}) = 80$$

במגמת הפיזיקה:

$$P(A/B) = 0.75 \quad \rightarrow N(A \cap B) = 0.75 \cdot 160 = 120$$
$$P(A/\overline{B}) = 0.25 \quad \rightarrow N(A \cap \overline{B}) = 0.25 \cdot 40 = 10$$

במגמות האחרות:

$$P(A/B) = 0.8 \quad \rightarrow N(A \cap B) = 0.75 \cdot 80 = 64$$
$$P(A/\overline{B}) = 0.35 \quad \rightarrow N(A \cap \overline{B}) = 0.35 \cdot 200 = 106$$

<u>נשלים את הנתונים בטבלה:</u>

	מגמת פיזיקה - C			מגמות אחרות - $\overline{C}$			כלל המגמות		
	מספר המבקשים	מספר הנבחרים A	אחוז הנבחרים מבין המבקשים	מספר המבקשים	מספר הנבחרים A	אחוז הנבחרים מבין המבקשים	מספר המבקשים	מספר הנבחרים A	אחוז הנבחרים מבין המבקשים
בנים B	160	120	75%	80	64	80%	240	184	76.67%
בנות $\overline{B}$	40	10	25%	120	42	35%	160	52	32.5%
סך הכול	200	130	65%	200	106	53%	400	236	59%

ב. טענת התלמידים נובעת מכך ששיעור הנבחרים מהלומדים במגמת הפיזיקה 65%
ואילו שיעור הנבחרים מתלמידי המגמות האחרות עומד רק על 53% **.**
עמדת ההנהלה מסתמכת על כך, שללא הבדל בין שני המיגדרים, הרי ששיעור הנבחרים
מקרב המגמות האחרות היה גדול משיעור הנבחרים במגמת הפיזיקה.
(בנים - $80\% > 75\%$ **, בנות -** $35\% > 25\%$ **)**

ג. היפוך הקשר, הקרוי גם "אפקט סימפסון" נוצר בשל העובדה שאחוז המתקבלים מקרב הבנים
שאחוז המתקבלים מקרב הבנים (76.67%**) גבוה משיעור הנבחרים מבין הבנות (**32.5%**),**
כאשר שיעור הבנים במגמת הפיזיקה הוא $\frac{160}{200} = 80\%$ **ובמגמות האחרות רק** $\frac{80}{200} = 40\%$ **.**