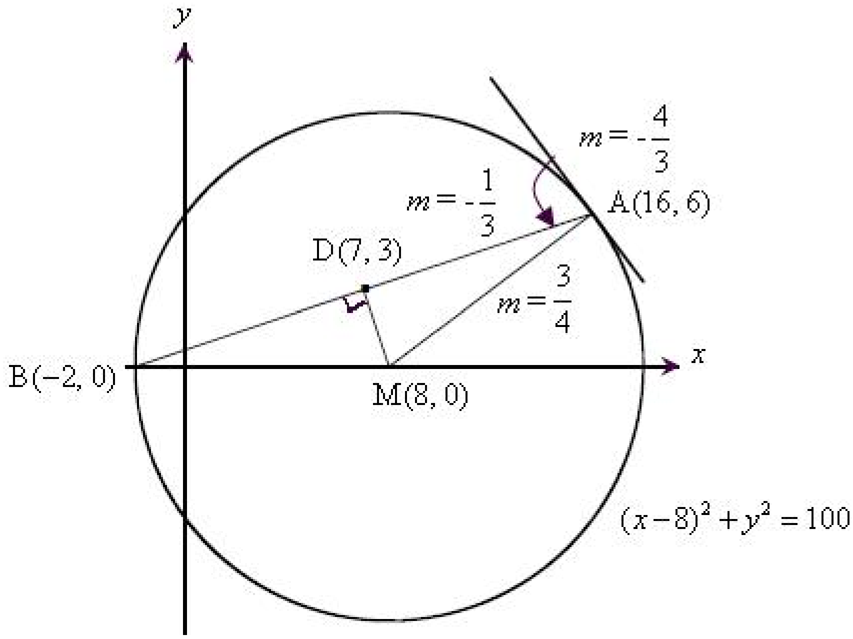
א. נסמן את הפתרונות על הציור ונביא את ההוכחה לאחר מכן



נמצא את אמצע המיתר AB , באמצעות נוסחת אמצע קטע:

$$D(\frac{16-2}{2}, \frac{6-0}{2}) \quad \rightarrow \boxed{D(4,3)}$$

נמצא את שיפוע המיתר AB באמצעות נוסחת שיפוע בין שתי נקודות

$$m = \frac{6-0}{16+2} = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{m_{AB} = \frac{1}{3}}$$

מכיון וקטע העובר במרכז המעגל וחוצה מיתר – מאונך למיתר

נקבל את שיפוע הקטע DM : $\boxed{m_{DM} = -3}$

נמצא את שיפוע הרדיוס DM באמצעות נוסחת שיפוע בין שתי נקודות

$$-3 = \frac{mx-11}{x-7}$$

$$-3x + 21 = mx - 11$$

$$mx + 3x = 32$$

$$(m+3)x = 32$$

$$\boxed{x = \frac{32}{m+3}}$$

$$y = \frac{32}{m+3} - 8$$

$$\boxed{y = \frac{24m-24}{m+3}}$$

תשובה: $M(\frac{32}{m+3}, \frac{24m-24}{m+3}), \quad m \neq -3$

ב. נמצא את הזוויות בין המשיק למיתר,

באמצעות הנוסחה: $\tan\sim = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

המשיק מאונך לרדיוס בנקות ההשקה

ולכן נמצא תחילה את שיפוע הרדיוס MA

$$m = \frac{6-0}{16-8} = \frac{3}{4} \rightarrow \boxed{m_{\text{AM}} = \frac{3}{4}}$$

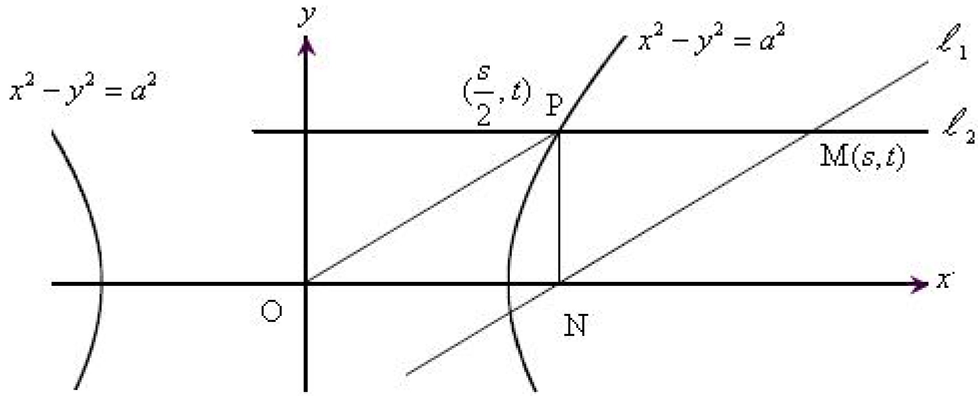
ובהתאם שיפוע המשיק הוא $-\dfrac{4}{3}$

נסמן את הזווית המבוקשת נגד כיוון השעון ונחשבה

$$\tan\sim = \frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}} = 3 \quad \rightarrow \boxed{\sim = 71.565°}$$

תשובה: 71.565°

א. נציג את הפתרונות על ציור מתאים ונביא את ההוכחה לאחר מכן:



נסמן $M(s,t)$ **- נקודה על המקום הגיאומטרי.**

ℓ_2 **מקביל לציר ה-** x **ולכן** $y_P = t$

ℓ_1 **מקביל ל-** OP **המרובע** ONMP **הוא מקבילית**

(שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות)

לכן: $ON = PM$ **(צלעות נגדיות שוות במקבילית)**

ונקבל ש: $x_P = \frac{s}{2}$ **ובהתאם:** $P(\frac{s}{2}, t)$

נציב שיעורי $P(\frac{s}{2}, t)$ **במשוואת ההיפרבולה**

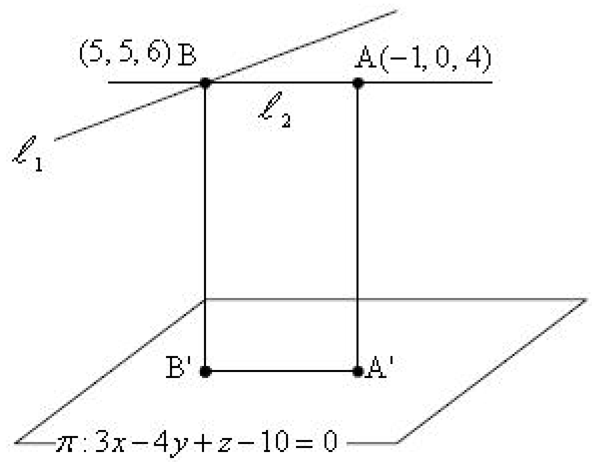
$$(\frac{s}{2})^2 - t^2 = a^2 \quad \rightarrow \frac{s^2}{4} - t^2 = a^2$$

ולכן: $x^2 - 4y^2 = a^2$ **, ברביע הראשון**

תשובה : $\frac{x^2}{4} - y^2 = a^2$, $(x, y > 0)$

א. נרשום את הנקודות המשתתפות בתרגיל, והסברים בהמשך

$B(5, 5, 6) \quad A(-1, 0, 4)$



(1) נמצא את ווקטור הכיוון של ℓ_2 -

בין הנקודה $A(-1, 0, 4)$ **לנקודה טיפוסית של** ℓ_1

נתון: הישר ℓ_1 **הוא** $\underline{x} = (-1, 3, 0) + t(3, 1, 3)$

נקודה טיפוסית על הישר: $B(-1+3t, 3+t, 3t)$

$\overrightarrow{AB} = \underline{B} - \underline{A} = \underline{x} : (3t, 3+t, 3t-4)$

תשובה: וקטור הכוון של הישר ℓ_2. הוא $\underline{x} : (3t, 3+t, 3t-4)$

(2) ℓ_2 **מקביל למישור** ® **שמשוואתו** $3x - 4y + z - 10 = 0$

לכן הוא מאונך לנורמל של המישור:

$$(3t, 3+t, 3t-4)(3, -4, 1) = 0$$
$$3t \cdot 3 + (3+t) \cdot (-4) + (3t-4) \cdot 1 = 0$$
$$9t - 12 - 4t + 3t - 4 = 0$$
$$8t = 16$$
$$\boxed{t = 2}$$

נציב 2 **במקום** t **בנקודה הטיפוסית:**

$$B(-1 + 3 \cdot 2, 3 + 2, 3 \cdot 2) \quad \to \boxed{B(5, 5, 6)}$$

תשובה: $B(5, 5, 6)$

ב. יש למצוא את היקף המלבן $ABB'A'$

נמצא את מרחק הקדקוד A' מהנקודה A

על ידי מרחקה מהמישור $® : 3x-4y+z-10=0$,

מכיוון ו- A', שעל המישור, היא הקרובה ביותר ל- A

באמצעות הנוסחה: $$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d=\frac{|3\cdot(-1)-4\cdot 0+1\cdot 4-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{26}}$$

נמצא את המרחק בין $A(-1, 0, 4)$ ל- $B(5, 5, 6)$

$$d=\sqrt{(5+1)^2+(5-0)^2+(6-4)^2}=\sqrt{65}$$

בהתאם היקף המלבן הוא: $2\sqrt{65}+2\cdot\frac{9}{\sqrt{26}}=19.65$

תשובה: היקף המלבן $ABB'A'$ הוא 19.65 יח'

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax}{1+x^2}$ **,** $a>0$

נמצא את נקודות הקיצון

$$\boxed{f(x)=\frac{ax}{1+x^2}}$$

$$f'(x)=a\cdot\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

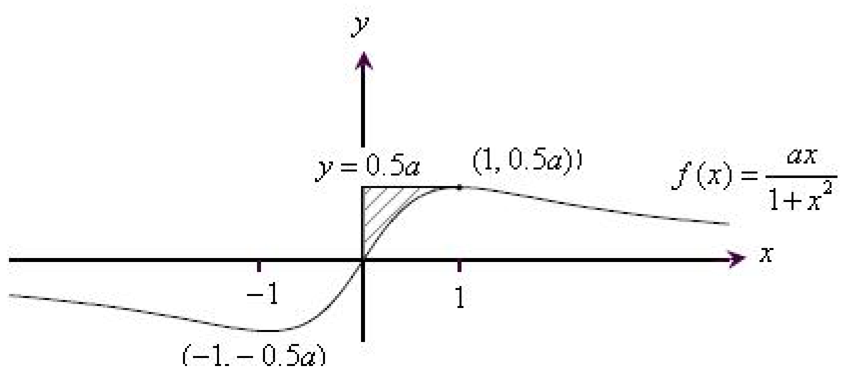
$$\boxed{f'(x)=a\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}$$

$$0=1-x^2=(1-x)(1+x)$$

$$x=1\to(1,0.5a)\quad x=-1\to(-1,-0.5a)$$

ועל פי הציור הנתון: $(1,0.5a)$ **היא נקודת המקסימום.**

ישר בנקודת קיצון מקביל לציר ה- x **ולכן בנקודת המקסימום משוואת המשיק היא** $y=0.5a$



נחשב את השטח הנדרש, על ידי אינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית של הביטוי במכנה.

$$S=\int_0^1\left(\frac{a}{2}-\frac{ax}{1+x^2}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\cdot\frac{ax}{1+x^2}\cdot 2\text{x}\right)dx$$

$$S=\left(\frac{a}{2}x-\frac{a}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right)\Big]_0^1$$

$$S=\left(\frac{a}{2}\cdot 1-\frac{a}{2}\ln\left|1+1^2\right|\right)-\left(\frac{a}{2}\cdot 0-\frac{a}{2}\ln\left|1+0^2\right|\right)$$

$$s=\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\cdot\ln 2\right)-(0)$$

$$S=\boxed{\frac{a}{2}(1-\ln 2)}$$

תשובה: $\frac{a}{2}(1-\ln 2)$

w הוא מספר מרוכב שונה מאפס ו- $z = \frac{w}{\overline{w}}$

נראה כי אם $w = rcis\sim$ אז $\overline{w} = rcis(-\sim)$

$$w = rcis\sim$$
$$w = r(\cos\sim + i\sin\sim)$$
$$\overline{w} = r(\cos\sim - i\sin\sim)$$
$$\overline{w} = r(\cos(-\sim) + i\sin(-\sim)) \quad \leftarrow \cos x = \cos(-x), \quad \sin(x) = -\sin(-x)$$
$$\overline{w} = r(cis(-\sim))$$
$$\boxed{w = rcis(\sim) \rightarrow \overline{w} = rcis(-\sim)}$$

נזכיר מנה של מספרים מרוכבים, בהצגה קוטבית:

הרדיוס החדש הוא מנת הרדיוסים והארגומנט הוא הפרש הארגומנטים

$$z = \frac{w}{\overline{w}}$$

$$z = \frac{r\ cis\sim}{r\ cis(-\sim)}$$
$$z = cis(\sim - (-\sim))$$
$$\boxed{z = cis2\sim}$$

קבלנו שהערך המוחלט של z **(אורך הרדיוס) הוא** 1

והארגומנט (הזווית בהצגה הקוטבית) כפולה מהזווית של w

הוכח !

א. נתונה הפונקציה $f(x)$ **המוגדרת על ידי** $f(x)=\frac{e^x}{e^x-a}$ **,** $a>0,\quad a\neq 1$

(1) על המכנה להיות שונה מאפס

$$e^x-a\neq 0$$
$$e^x\neq a$$
$$\boxed{x\neq \ln a}$$

תשובה $x\neq \ln a$ **:**

(2) מונה הפונקציה חיובי לכל x **,**

לכן אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **שיעור ה-** x **הוא** 0

$$f(0)=\frac{e^0}{e^0-a}$$
$$f(0)=\frac{1}{1-a}$$
$$\boxed{(0,\frac{1}{1-a})}$$

תשובה $(0,\frac{1}{1-a})$ **:**

(3) אסימפטוטה אנכית קשורה לתחום ההגדרה

$$\lim_{x\to\ln a}\frac{e^x}{e^x-a}=\frac{e^{\ln a}}{e^{\ln a}-a}=\frac{a}{a-a}=\frac{a}{0}=\infty$$

אסימפטוטות אופקיות, כאשר $x\to\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x(1-\frac{a}{e^x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1-\frac{a}{e^x})}=\frac{1}{1-0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-a}=\frac{0}{0-a}=0$$

תשובה: $x=\ln a,\quad y=1,\quad y=0$

ב. נראה שנגזרת הפונקציה שלילית בתחום ההגדרה

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x-a}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-a)-e^xe^x}{(e^x-a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-a-e^x)}{(e^x-a)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=-a\cdot\frac{e^x}{(e^x-a)^2}}$$

הביטויים במונה ומבכנה חיוביים לכל x בתחום ההגדרה

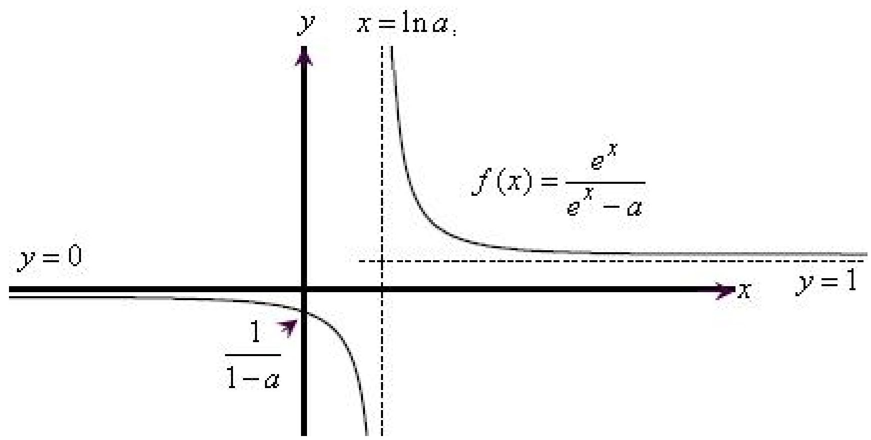
נתון כי $a>0$ ולכן הנגזרת שלילית בתחום ההגדרה

והפונקציה יורדת לכל x בתחום ההגדרה

ג. (1) נסרטט את גרף הפונקציה עבור $a>1$

נקבל $\ln a>0$ והאסימפטוטה האנכית מימין לציר ה- y

נקבל $1-a<0$ ולכן נקודת החיתוך עם ציר ה- y מתחת לציר ה- x



(2) נסרטט את גרף הפונקציה עבור $0<a<1$

נקבל $\ln a<0$ והאסימפטוטה האנכית משמאל לציר ה- y

נקבל $1-a>0$ ולכן נקודת החיתוך עם ציר ה- y מעל לציר ה- x