נתונה הפרבולה $f(x)=(m^2-1)x^2-2(m-1)x+2$, $m\neq\pm1$.

א. לאילו ערכים של m **הפרבולה נמצאת מעל לישר** $y=1$ **:**

נפתור את אי השוויון $f(x)>1$ **ונמצא את התנאים הנדרשים ל"נכון לכל** x **".**

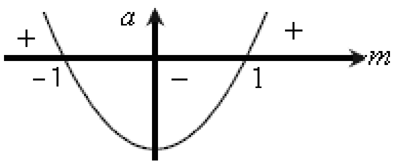
$$(m^2-1)x^2-2(m-1)x+2>1$$
$$(m^2-1)x^2-2(m-1)x+1>0$$

$$a=m^2-1,\quad b=-2(m-1),\quad c=1$$

<u>מקרה הישר (משוואה ממעלה ראשונה)</u>

לא רלוונטי, כי נתון $m\neq\pm1$

<u>מקרה הפרבולה (משוואה ממעלה שנייה)</u>

התנאים הנדרשים על מנת **שהאי-שוויון יהיה נכון לכל** x **הם:** $a>0$ **,** $\Delta<0$	
$a>0$ **(פרבולה בעלת מינימום), כלומר:** $m^2-1>0$ $(m+1)(m-1)>0$ $m<-1$ **או** $m>1$	
$\Delta<0$ **(לא נוגעת בציר ה-** x **)** $\Delta=b^2-4ac<0$ $(-2(m-1))^2-4\cdot(m^2-1)(1)<0$ $4(m-1)^2-4(m-1)(m+1)<0$ $4(m-1)(m-1-(m+1))<0$ $4(m-1)(-2)<0$ $-8n+8<0$ $-8m<-8\quad /:-8<0$ $\boxed{m>1}$	

חיתוך של שני התנאים גם יחד: $m>1$

תשובה: $m>1$

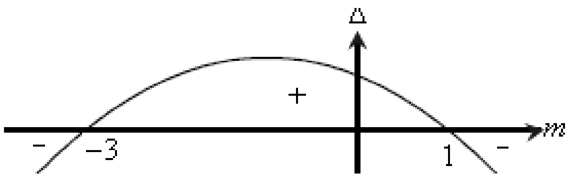
ב. נמצא לאילו ערכים של m הפרבולה חותכת את ציר ה-x בשתי נקודות שונות, משמאל לראשית הצירים.

התנאים הנדרשים: $\Delta > 0$ **,** $\frac{c}{a} > 0$ **,** $-\frac{b}{a} < 0$ **(למעשה גם** $a \neq 0$ **שיהיה אוטומטית נכון עקב השימוש בוייאטה)**

$\Delta > 0$ **(שני פתרונות שונים)**

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$
$$(-2(m-1))^2 - 4\cdot(m^2-1)(2) > 0$$
$$4(m-1)^2 - 8(m-1)(m+1) > 0$$
$$4(m-1)(m-1-2(m+1)) > 0$$
$$4(m-1)(-m-3) > 0$$
$$m = 1, -3$$

ובהתאם לסקיצה משמאל: $-3 < m < 1$

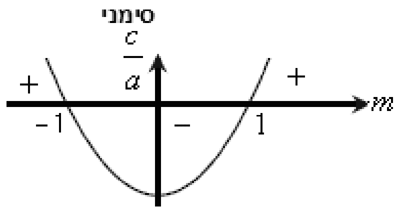


$\frac{c}{a} > 0$ **(שורשים שווי סימן), כלומר:**

$$\frac{2}{m^2-1} > 0$$

ובהתאם לסקיצה משמאל:

$m < -1$ **או** $m > 1$



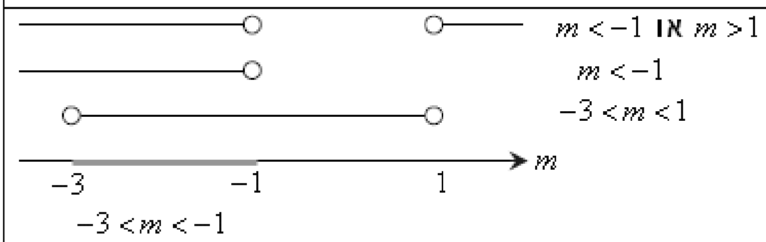
$-\frac{b}{a} < 0$ **(סכום שורשים שלילי)**

$$\frac{2(m-1)}{m^2-1} < 0$$
$$\frac{2\,\cancel{(m-1)}}{\cancel{(m-1)}\,(m+1)} < 0 \quad /\,(m+1)^2$$
$$2(m+1) < 0$$
$$m+1 < 0$$
$$m < -1$$

ובהתאם: $m < -1$

חיתוך של שלושת התנאים גם יחד:

$$-3 < m < -1$$



תשובה: $-3 < m < -1$

א. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = xa_n - 8 \end{cases}$$

ידוע כי b_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי $b_n = a_n - 4$.

על פי הגדרת הסדרה b_n : $b_1 = a_1 - 4 = 6 - 4 = 2$

נמצא את a_2 על פי כלל הנסיגה: $a_2 = xa_1 - 8 = 6x - 8 \quad (n=1)$

על פי הגדרת הסדרה b_n : $b_2 = a_2 - 4 = 6x - 8 - 4 = 6x - 12$.

נתון כי b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה 3, לכן $\frac{b_2}{b_1} = 3$.

$$\frac{6x-12}{2} = 3$$
$$6x - 12 = 6$$
$$6x = 18$$
$$\boxed{x = 3}$$

תשובה: $x = 3$

ב. כיוון ש- b_n הנדסית $(b_1 = 2, \quad q = 3)$

ניתן להשתמש בנוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית: $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

תשובה: $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

ג. נתון כי $b_n = a_n - 4$**, לכן** $a_n = b_n + 4$ **ובהתאם לסעיף ב:** $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$

תשובה: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$

ד. נמצא את הנוסחה עבור סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n -

בהתאם לסכום של כל אחד משני המחוברים בביטוי $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$ **:**

המחובר הראשון הוא סכום של סדרה הנדסית עם איבר ראשון $2 \cdot 3^{1-1} = 2$ **ומנה** 3
נרשום את האיברים זה מתחת לזה לצורך המחשה:

$$nlines + \begin{cases} 2 + 4 \\ 6 + 4 \\ 18 + 4 \\ \dots \\ \dots \\ 2 \cdot 3^{n-1} + 4 \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{2} \cdot (3^n - 1)}{\cancel{3-1}} + 4n$$

תשובה: סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n הוא: $3^n - 1 + 4n$.

<u>נתונים</u>

1. ABCD **טרפז שווה שוקיים**

2. AH **גובה הטרפז**

3. $AD = AB = BC = a$

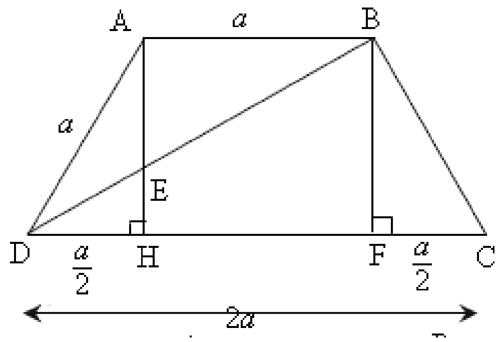
4. $CD = 2a$

צ"ל:

א. היחס $\frac{AE}{EH}$

ג. אורך הקטע AE

<u>הוכחה</u>



הסבר		טענה	נימוק
1	5	$ABCD$ טרפז שווה שוקיים	נתון
2	6	AH גובה הטרפז	נתון
5, 6	7	AB, CD בסיסי הטרפז	הגובה עובר ביניהם
	8	$BF \perp CD$	בניית עזר
6, 8	9	$\angle AHD = \angle BFC = 90°$	האנכים יוצרים זוויות ישרות וכלל מעבר
7	10	$AB \parallel CD$	בסיסי הטרפז מקבילים זה לזה
9, 10	11	$\angle HAB = 90°$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
5	12	$\angle D = \angle C$ (ז)	זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים
9, 12	13	$ABFB$ מלבן	מרובע עם שלוש זוויות ישרות
3	14	$AD = AB = BC = a$ (צ)	נתון
13, 14	15	$HF = a$	צלעות נגדיות שוות במלבן
9, 12	16	$\angle HAD = \angle FBC$ (ז)	אם שני זוגות של זוויות שוות בין משולשים, אז גם הזוג השלישי שווה (משלים ל- $180°$)
12, 14, 16	17	$\Delta ADH \cong \Delta BCF$	משפט חפיפה ראשון ז.צ.ז.
17	18	$DH = CF$	צ.מ.ב.ח.
4	19	$CD = 2a$	נתון
15, 18, 19	20	$DH = \frac{2a - a}{2} = \frac{a}{2}$	הפרש קטעים וחלוקה ב- 2
10, 15, 20	21	$\frac{AE}{EH} = \frac{AB}{DH} = \frac{a}{0.5a} = 2$	משפט תאלס הרחבה 2 והצבה
מ.ש.ל. א			
9	22	$AH = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2}$ $= \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$	משפט פיתגורס ΔADH
21	23	$AE = \frac{2}{3}AH$	חישוב
22, 23	24	$AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$	הצבה
24	25	$\boxed{AE = \frac{a}{\sqrt{3}}}$	חישוב
מ. ש. ל. ב			

נתונים

1. ABC **משולש שווה צלעות**

2. ECD **משולש שווה צלעות**

עבור ג'

3. HE = HD

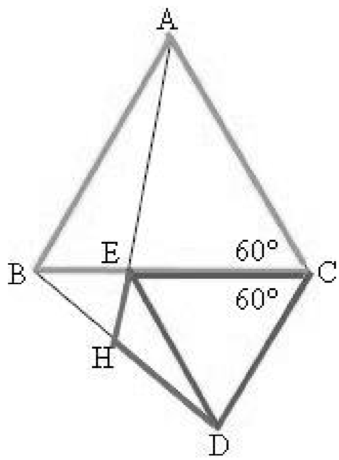
צ"ל:

א. $\Delta AEC \cong \Delta BDC$

ב. **S**EAC = **S**HED

ג. $AE \perp BC$

הוכחה



הסבר		טענה	נימוק
1	4	**משולש שווה צלעות** ABC	**נתון**
2	5	**משולש שווה צלעות** ECD	**נתון**
4	6	$AC = BC$ **(צ)**	**צלעות שוות במש"ץ**
4, 5	7	$S ACE = S BCD = 60°$ **(ז)**	**כל הזוויות שוות במש"ץ וכלל מעבר**
5	8	$EC = DC$ **(צ)**	**צלעות שוות במש"ץ**
6, 7, 8	9	$\Delta AEC \cong \Delta BDC$	**משפט חפיפה שני צ.ז.צ**
		מ.ש.ל א	
7	10	$S HEC = S EAC + 60°$	**זווית חיצונית שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה ב-** ΔAEC
5	11	$S CED = 60°$	**זוויות שוות במש"ץ**
10, 11	12	$S HEC - S CED =$ $S EAC + 60° - 60°$	**חיסור זוויות שוות מזוויות שוות**
12	13	$S EAC = S HED$	**חישוב**
		מ.ש.ל ב	
4	14	$HE = HD$	**נתון**
8, 14	15	**דלתון** $CEHD$	**שני משולשים שווי שוקיים עם בסיס משותף**
15	16	$S HEC = S HDC$	**זוויות בסיס שוות בדלתון**
9	17	$S AEC = S HDC$	**ז.מ.ב.ח.**
16, 17	18	$S AEC = S HEC$	**כלל המעבר**
18	19	$S AEC = 90°$	**זוויות צמודות השוות זו לזו**
19	20	$AE \perp BC$	**יוצר זוויות ישרה**
		מ.ש.ל. ג	

א. כיוון שדנה מוציאה את הכדורים עם החזרה -

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $p=\frac{4}{10}=0.4\ ,\ n=5\ ,k=3$

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P(k)=\binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

את ההסתברות למאורע של: "3 **מ-** 5 **הכדורים שדנה תוציא מכד** II **יהיו שחורים"**

$$P_5(3)=\binom{5}{3}(0.4)^3(1-0.4)^{5-3}$$
$$P_5(3)=\frac{5!}{3!(5-3)!}\cdot 0.4^3\cdot 0.6^2$$
$$P_5(3)=10\cdot 0.4^3\cdot 0.6^2$$
$$P_5(3)=0.2304$$

תשובה: ההסתברות שדנה תוציא מכד II **כדור שחור בדיוק** 3 **פעמים היא** 0.2304 **.**

ב. יש למצוא מהי ההסתברות שדנה תוציא כדור שחור בדיוק 3 **פעמים, מאחד משני הכדים.**

נחשב תחילה באמצעות נוסחת ברנולי את ההסתברות למאורע של:

"3 **מ-** 5 **הכדורים שדנה תוציא מכד** I **יהיו שחורים"**

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $p=\frac{6}{10}=0.6\ ,\ n=5\ ,k=3$

$$P_5(3)=\binom{5}{3}(0.6)^3(1-0.6)^{5-3}$$
$$P_5(3)=\frac{5!}{3!(5-3)!}\cdot 0.6^3\cdot 0.4^2$$
$$P_5(3)=10\cdot 0.6^3\cdot 0.4^2$$
$$P_5(3)=0.3456$$

P(**שלושה כדורים שחורים**) =

P(**שלושה כדורים שחורים** I **I כד**) + P(**שלושה כדורים שחורים** II **I כד**) =

P(**כד** I) $\cdot$ P(**שלושה כדורים שחורים** / **כד** I) + P(**כד** II) $\cdot$ P(**שלושה כדורים שחורים** / **כד** II) =

$$\frac{2}{6}\cdot 0.3456+\frac{4}{6}\cdot 0.2304=0.2688$$

תשובה: ההסתברות שדנה תוציא כדור שחור בדיוק 3 **פעמים היא** 0.2688 **.**

ג. יש למצוא את ההסתברות של $P($ כד II / 3 כדורים שחורים$)$,

כי כך בקובייה התקבל מספר גדול מ- 2, כאשר ידוע כי הוצאו 3 כדורים שחורים.

$$P(\text{כד } II \,/\, 3 \text{ כדורים שחורים}) = \frac{P(\text{כד } II \cap 3 \text{ כדורים שחורים})}{P(3 \text{ כדורים שחורים})} = \frac{\frac{4}{6}\cdot 0.2304}{0.2688} = \frac{4}{7}$$

תשובה: ההסתברות שדנה הוציאה את שלושת הכדורים השחורים מכד II ,

לאחר שבקובייה התקבל מספר גדול מ- 2 היא $\frac{4}{7}$.

א. נגדיר את הקבוצות הבאות

S - **קבוצת האופנועים בעיר מסוימת**

A - **קבוצת אופנועים ירוקים**

$\overline{A}$ - **קבוצת האופנועים כחולים**

D - **קבוצת האופנועים שהעד מאבחן כירוקים**

(התיאור של אבחנת עד הראייה שיש לבחון את אמינותו)

$\overline{D}$ - **קבוצת האופנועים שהעד מאבחן ככחולים**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$P(A) = 0.2 \quad \to P(\overline{A}) = 0.8$$

$$P(D / A) = 0.75 \quad \to P(\overline{D} / A) = 0.25$$

$$P(\overline{D} / \overline{A}) = 0.75 \quad \to P(D / \overline{A}) = 0.25$$

יש למצוא את היחס המעודכן: $R = \dfrac{P(A / D)}{P(\overline{A} / D)}$

הדיאגנוסטיות של אבחון האופנוע כירוק, ע"י עד הראייה היא:

$$\frac{P(D / A)}{P(D / \overline{A})} = \frac{0.75}{0.25} = 3$$

כלומר עוצמת הקשר הסטטיסטי היא 3

נמצא את השיעור הבסיסי

$$\frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

נמצא את היחס המעודכן

$$R = \frac{P(A / D)}{P(\overline{A} / D)} = \frac{P(D / A)}{P(D / \overline{A})} \cdot \frac{P(A)}{P(\overline{A})}$$

$$R = 3 \cdot 0.25$$

$$R = 0.75$$

תשובה: היחס המבוקש (היחס המעודכן) הוא 0.75**.**

ב. נמצא את ההסתברות שהאופנוע הפוגע הוא אכן ירוק, כפי שטען עד הראייה:

$$P(A/D)=\frac{R}{1+R}$$
$$P(A/D)=\frac{0.75}{1+0.75}$$
$$P(A/D)=\frac{3}{7}$$

תשובה: ההסתברות שאופנוע הפוגע הוא ירוק היא $\frac{3}{7}$ **.**

ג. באם השיעור הבסיסי של האופנועים הירוקים היה גדול יותר מ- $\frac{20}{80}$, **שהוא היחס הקיים,**

אז היה גדל היחס המעודכן ובהתאם גדלה ההסתברות שעד הראייה אכן צדק.

ההיגיון הוא פשוט: ככל שגדל שיעור האופנועים הירוקים, כאשר הדיאגנוסטיות לא משתנה, כך גדלה ההסתברות שהאופנוע הוא אכן ירוק.

תשובה: במקרה זה ההסתברות תהייה גדולה מזו שחושבה בסעיף ב.