נסמן ב- x **את המחיר ליחידה של מוצר א' (₪)**

וב- y **את המחיר ליחידה של מוצר ב' (₪)**

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		כמות	מחיר ליחידה ₪	סה"כ מחיר ₪
היום הראשון של המכירה המיוחדת	מוצר א'	30	x	$30x$
	מוצר ב'	$\frac{24x}{y}$	y	$0.8\cdot 30x=24x$
השוואת הקנייה ב- 120 ₪	מוצר א'	$\frac{120}{x}$	x	120
	מוצר ב'	$\frac{120}{y}$	y	120

ידוע כי במכירה המיוחדת מספר היחידות של מוצר א' שאפשר היה לקנות ב- 120 **שקל,**
היה גדול ב- 10 **יחידות ממספר היחידות של מוצר ב' שאפשר היה לקנות באותו סכום.**

המשוואה המתאימה, אם כן, היא: $\frac{120}{x}=\frac{120}{y}+10$

מספר היחידות של מוצר ב' ביום השני

היה גדול ב- $\frac{1}{3}$ **ממספר היחידות של מוצר זה שנמכרו ביום הראשון.**

המשוואה המתאימה, אם כן, היא: $28-\frac{24x}{y}=\frac{32x}{y}$

נעבד משוואה זו: $28=\frac{56x}{y} \quad \rightarrow \boxed{y=2x}$

נציב במשוואה הראשונה:

$$\frac{120}{x}=\frac{120}{2x}+10 \quad /\cdot 2x$$
$$240-120+20x$$
$$\boxed{x=6} \quad \rightarrow \boxed{y=12}$$

תשובה: המחיר ליחידה של מוצר א' הוא 6 **₪ והמחיר ליחידה של מוצר ב' הוא** 12 **₪.**

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $1+3^{2\cdot 1}=10$ **אגף שמאל:** $a_2=4\cdot 3^{2-1}-2=10$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $a_2-a_3+a_4-\ldots+a_{2k}=1+3^{2k}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$\underbrace{a_2-a_3+a_4-\ldots+a_{2k}}_{\downarrow}-a_{2k+1}+a_{2k+2}=1+3^{2(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+3^{2k} \quad -(4\cdot 3^{2k+1-1}-2)+4\cdot 3^{2k+2-1}-2=1+3^{2k+2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל

$$\Leftrightarrow 1+3^{2k}-4\cdot 3^{2k}+2+4\cdot 3^{2k+1}-2=1+3^{2k+2}$$
$$\Leftrightarrow 1+3^{2k}-4\cdot 3^{2k}+4\cdot 3\cdot 3^{2k}=1+9\cdot 3^{2k}$$
$$\Leftrightarrow 1+9\cdot 3^{2k}=1+9\cdot 3^{2k}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. **בדקנו את נכונות הטענה עבור** $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו,**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

ב. יש לחשב את הסכום $a_1-a_2+a_3-a_4\ \ldots\ +a_{13}$

$$a_1-a_2+a_3-a_4\ \ldots\ +a_{13}=$$
$$=a_1-\underbrace{(a_2-a_3+a_4\ \ldots+a_{12})}_{\downarrow}+a_{13}=$$
$$=4\cdot 3^{1-1}-2-(1+3^{2\cdot 6})+4\cdot 3^{13-1}-2$$

על פי ההוכחה בסעיף א – החלפנו את הביטוי במסומן, כאשר $n=6$

$$=4-2-1-3^{12}+4\cdot 3^{12}-2$$
$$=3\cdot 3^{12}-1$$
$$=3^{13}-1$$
$$=1,594,322$$

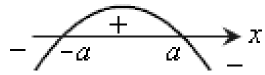
תשובה: $1,594,322$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, $a>0$ **.**

(1) בהתאם למכנה: $x\neq 0$

על הביטוי שבתוך השורש להיות אי שלילי, כאשר הביטוי מתאפס עבור $x=\pm a$

נצייר את הפרבולה המתאימה:



ובהתאם תחום ההגדרה הוא : $-a\le x\le a,\quad x\neq 0$

תשובה: $-a\le x\le a,\quad x\neq 0$

(2) בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$

תשובה: $(-a,0),\quad (a,0)$ **(הערה – נקודות אלה תהיינה גם נקודות קיצון קצה)**

(3) $x=0$ **מאפס מכנה ולא מונה. נראה שקיימת אסימפטוטה אנכית:**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a}{x}=-\infty$$

תשובה: $x=0$ **.**

(4) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה

$$\boxed{f(x)=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{-\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-(a^2-x^2)}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

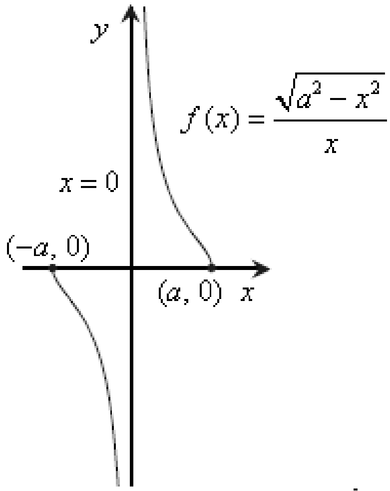
$$f'(x)=\frac{-x^2-a^2+x^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}}$$

הביטוי שבמונה שלילי, והביטוי שבמכנה חיובי, לכן הנגזרת שלילית

תשובה: הפונקציה יורדת בתחום ההגדרה $-a\le x\le a,\quad x\neq 0$

ב. להלן סקיצה של גרף הפונקציה:



ג. נמצא את נקודת החיתוך של הישר $y=\sqrt{3}$ **עם הפונקציה:**

$$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

$$x\sqrt{3}=\sqrt{a^2-x^2} \quad (\,)^2$$

$$3x^2=a^2-x^2$$

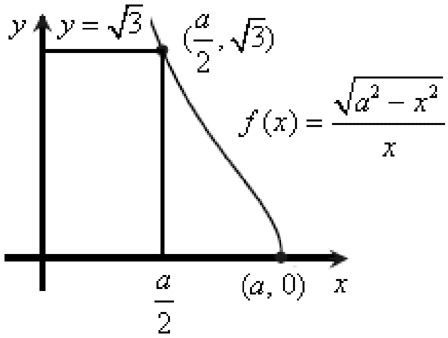
$$4x^2=a^2$$

$$x=\frac{a}{2} \quad \leftarrow x>0$$

עקב ההעלאה בריבוע נדרשת בדיקה: $\frac{a}{2}\sqrt{3}=\sqrt{a^2-(\frac{a}{2})^2} \quad \rightarrow \frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{a}{2}\sqrt{3}\ o.k.$

ונקודת החיתוך היא $(\frac{a}{2},\sqrt{3})$

נחלק את השטח לשני חלקים, כמתואר בסקיצה:



$$V=p\int_{0}^{\frac{a}{2}}(\sqrt{3})^2\,dx+p\int_{\frac{a}{2}}^{a}(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x})^2\,dx$$

$$V=p\int_{0}^{\frac{a}{2}}3\,dx+p\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{a^2-x^2}{x^2}\,dx$$

$$V=p\int_{0}^{\frac{a}{2}}3\,dx+p\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{a^2}{x^2}-1\,dx$$

$$V=p\int_{0}^{0.5a}3\,dx+p\int_{0.5a}^{a}\frac{a^2}{x^2}-1\,dx$$

$$V=p\ (3x\Big]_{0}^{0.5a}+(-\frac{a^2}{x}-x\Big]_{0.5a}^{a})$$

$$V=p\,(\,(3\cdot0.5a-3\cdot0)+((-\frac{a^2}{a}-a)-(-\frac{a^2}{0.5a}-0.5a)))$$

$$V=p\,(1.5a+0.5a)$$

$$\boxed{V=2p\,a}$$

תשובה: **גודל נפח גוף הסיבוב הוא** $2p\,a$ **יח"ק.**

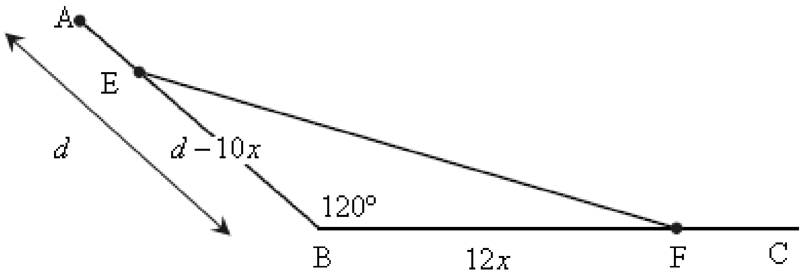
הפונקציה שיש להביא ל*מינימום* היא *המרחק בין הרוכבים* , כלומר את EF **.**

נסמן ב- x **את זמן הרכיבה (שעות),**

לכן: הרוכב הראשון עבר $10x$ **ק"מ כך ש:** $\mathrm{EB}=d-10x$ **,**

הרוכב השני עבר $12x$ **ק"מ כך ש:** $\mathrm{BF}=12x$ **.**

נתון כי $\mathrm{EF}'(2.5)=0$ **.**



נשתמש במשפט קוסינוסים במשולש נתון כי EBF

$$\mathrm{EF}^2=\mathrm{EB}^2+\mathrm{BF}^2-2\cdot\mathrm{EB}\cdot\mathrm{EF}\cdot\cos120^\circ$$

$$\mathrm{EF}^2=(d-10x)^2+(12x)^2-2\cdot(d-10x)\cdot12x\cdot\cos120^\circ$$

$$\mathrm{EF}^2=(d-10x)^2+(12x)^2+12x(d-10x)$$

$$\mathrm{EF}^2=d^2-20dx+100x^2+144x^2+12dx-120x^2$$

$$\mathrm{EF}^2=124x^2-8dx+d^2$$

$$\boxed{\mathrm{EF}=\sqrt{124x^2-8dx+d^2}}$$

ניתן להביא פונקציה זו למינימום,

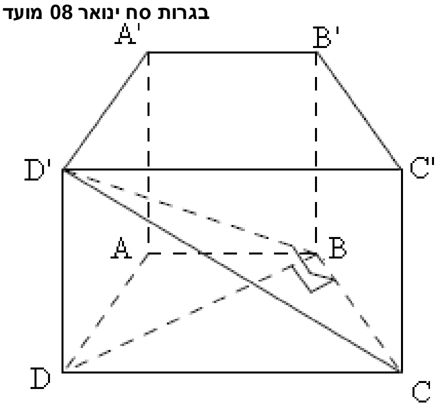
כאשר נמצא את נקודת הקדקוד של הפרבולה בעלת המינימום שבתוך השורש:

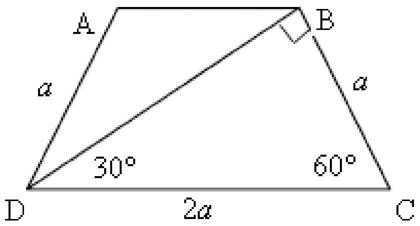
$$x_k=-\frac{b}{2a}=\frac{8d}{2\cdot124}=\frac{d}{31}$$

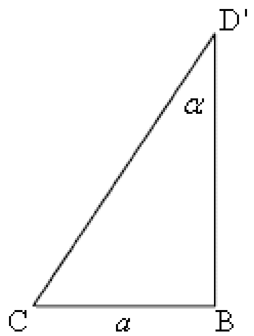
נתון כי המרחק מינימלי עבור 2.5 **שעות**

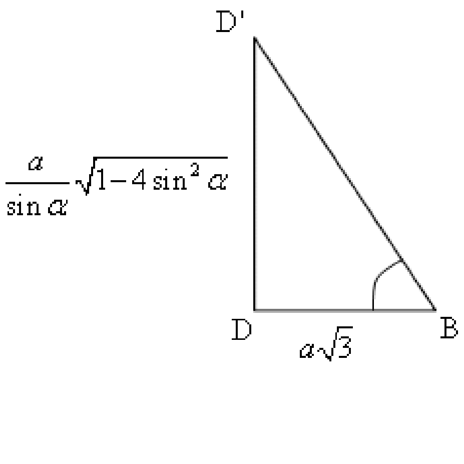
לכן: $\frac{d}{31}=2.5\quad\rightarrow d=77.5$ **ק"מ**

תשובה: המרחק שבין יישוב A **ליישוב** B **הוא** 77.5 **ק"מ.**









א. ΔBCD **הוא משולש עם זוויות** $30°, 60°, 90°$

לכן, הניצב הקצר שווה למחצית היתר: $CD = 2BC = 2a$ **.**

$CB \perp DB$ **וגם** $CB \perp BB'$ **לכן** $CB \perp BBB'D'$

ומכאן ש: $CB \perp BD'$ **(זה ניתן כנתון, רק במטרה לעזור)**

$\underline{\Delta D'CB}$

$$\sin a = \frac{a}{D'C}$$

$$\boxed{D'C = \frac{a}{\sin a}}$$

משפט פיתגורס במשולש ישר הזווית: $\Delta D'DC$

$$DD'^2 + CD^2 = D'C^2$$

$$DD' = \sqrt{\left(\frac{a}{\sin a}\right)^2 - (2a)^2}$$

$$DD' = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 a} - 4a^2}$$

$$DD' = \sqrt{\frac{a^2 - 4a^2\sin^2 a}{\sin^2 a}}$$

$$\boxed{DD' = \frac{a}{\sin a}\sqrt{1-4\sin^2 a}} \quad \leftarrow a, \sin a > 0$$

תשובה: גובה המנסרה הוא: $\frac{a}{\sin a}\sqrt{1-4\sin^2 a}$

ב. הזווית שבין המישור $D'BC$ **למישור הבסיס** $ABCD$ **:**

היא הזווית שבין שני האנכים לישר החיתוך BC **,**

שהם: $D'B$ **ו-** DB **, כלומר** $\mathbf{S}D'BD$ **ב-** $\Delta D'DB$ **.**

$D'D \perp AD$ **וגם** $D'D \perp DC$ **לכן** $D'D \perp ABCD$

ומכאן ש: $D'D \perp DB$ **.**

משפט פיתגורס ΔBCD **:** $BD = a\sqrt{3}$

$\underline{\Delta D'DB}$

$$\tan \mathbf{S}D'DB = \frac{D'D}{AD}$$

$$\tan \mathbf{S}A'QA = \frac{a}{a\sqrt{3}\sin a}\sqrt{1-4\sin^2 a}$$

תשובה: $\frac{\sqrt{1-4\sin^2 a}}{\sqrt{3}\sin a}$