א. הנקודה $A(1, 6)$ **נמצאת על הפרבולה** $y^2 = 2px$ **.**

נציב את שיעורי הנקודה במשוואת הפרבולה:

$$6^2 = 2p \cdot 1$$

$$\boxed{p = 18}$$

ולכן משוואת הפרבולה היא $y^2 = 36x$.

הנקודה $(12, -4)$ **נמצאת על מעגל קנוני.**

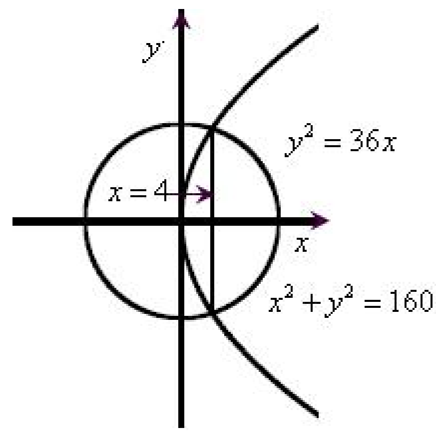
נציב את שיעורי הנקודה במשוואת מעגל קנוני:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$12^2 + (-4)^2 = R^2$$

$$\boxed{R^2 = 160}$$

ולכן משוואת המעגל הקנוני היא $x^2 + y^2 = 160$



נמצא את משוואת המיתר המשותף, על ידי הפתרון של מערכת המשוואות של העקומות:

$$-\begin{cases} x^2 + y^2 = 160 \\ y^2 = 36x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 160 - 36x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 36x - 160 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-36 \pm 44}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1 = 4} \quad \cancel{x_2 = -40} \quad \leftarrow x > 0$$

כיוון שהן הפרבולה והן המעגל הקנוני סימטריים לציר ה- x ,

הרי שמשוואת המיתר המשותף היא $x = 4$

תשובה: $x = 4$

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל הקנוני:

$$y^2 = 36 \cdot 4$$
$$y^2 = 144$$
$$y = \pm 12$$

ושיעורי נקודות החיתוך, קצוות הקוטר של המעגל החדש, הן $(4,12),(4,-12)$

בהתאם מרכז המעגל החדש הוא $(4,0)$**, רדיוסו** 12 **ומשוואתו:** $(x-4)^2 + y^2 = 144$

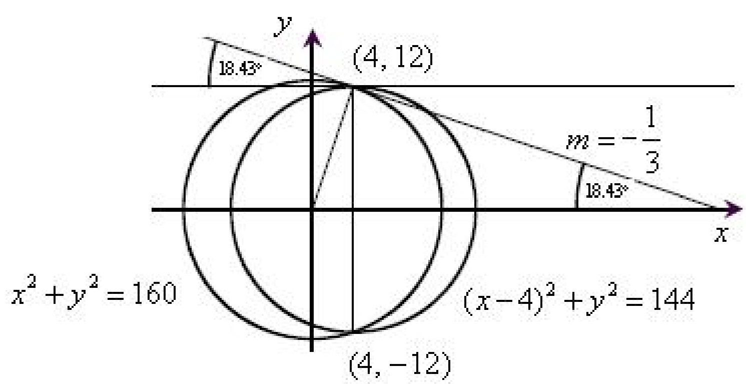
נמצא את נקודות החיתוך בין שני המעגלים:

$$-\begin{cases} x^2 + y^2 = 160 \\ (x-4)^2 + y^2 = 144 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 8x - 16 = 16$$
$$\Leftrightarrow 8x = 32$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x = 4}$$

ובהתאם $(4,12),(4,-12)$**, קצוות הקוטר, הן גם נקודות החיתוך בין שני המעגלים.**

נבחר את $(4,12)$ **כנקודת החיתוך לתרגיל – ובה נעביר שני משיקים.**

השרטוט המתאים:



במעגל $(x-4)^2 + y^2 = 144$ **, כיוון שקוטר** $x=4$ **מאונך לציר ה-** x **הרי שהמשיק מקביל לציר ה-** x,

והזווית בין שני המשיקים תהייה הזווית <u>החדה</u> של המשיק השני עם ציר ה- x.

שיפוע הרדיוס של $x^2 + y^2 = 160$ **אל הנקודה** $(4,12)$ **הוא:**

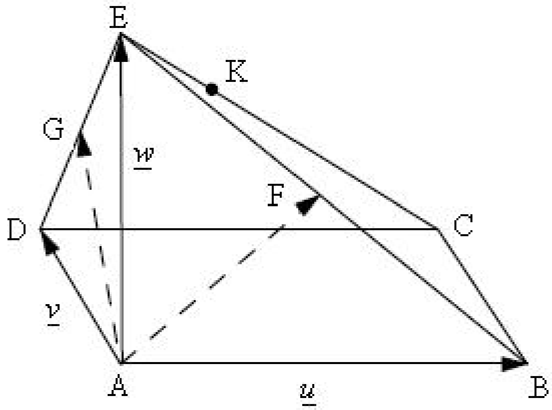
$$m = \frac{12-0}{4-0} = 3$$

ולכן שיפוע המשיק, הופכי לנגדי, הוא $m = -\frac{1}{3}$.

שיפוע המשיק שווה לטנגנס של הזווית שיוצר המשיק עם הכיוון החיובי של ציר ה- x **(במקרה זה זווית קהה).**

בהתאם הזווית החדה בין המשיק לציר ה- x **(השווה לזווית החדה שבין שני המשיקים) היא** $18.43°$**.**

תשובה: הזווית בין שני המשיקים היא בת $18.43°$.



א. (1) נקודה K **נמצאת על המקצוע** CE, **כך ש:** $\overrightarrow{EK}=t\overrightarrow{EC}$

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{EC}$$

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AE}+t(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{AK}=\underline{w}+t(-\underline{w}+\underline{u}+\underline{v})$$

$$\boxed{\overrightarrow{AK}=t\underline{u}+t\underline{v}+(1-t)\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{AK}=t\underline{u}+t\underline{v}+(1-t)\underline{w}$

(2) נתון כי $\overrightarrow{AK}=\sim\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{AF}$ **והבסיס** $ABCD$ **הוא מקבילית (בו הצלעות הנגדיות מקבילות ושוות)**

וכמו כן כי הנקודות G **ו-** F **הן אמצעי המקצועות** BE **ו-** DE, **בהתאמה.**

נמצא הצגה נוספת לווקטור $\overrightarrow{AK}$

$$\overrightarrow{AK}=\sim\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\sim(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}\beta(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\sim(\underline{w}+\underline{v})+\frac{1}{2}\beta(\underline{w}+\underline{u})$$

$$\boxed{\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\beta\underline{u}+\frac{1}{2}\sim\underline{v}+\frac{1}{2}(\sim+\beta)\underline{w}}$$

על פי ייחודיות ההצגה של הווקטור $\overrightarrow{AK}$ **, נקבל מערכת של שלוש משוואות עם שלושה נעלמים:**

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\beta=t \quad \to \beta=2t\\ \frac{1}{2}\sim=t \quad \to \sim=2t\\ \frac{1}{2}(\sim+\beta)=1-t\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(2t+2t)=1-t \quad \to 2t=1-t$$

$$\boxed{t=\frac{1}{3}}$$

ולכן הנקודה K **מחלקת את** EC **ביחס של** $1:2$ **(** $EK:KC=1:2$ **)**

תשובה: $1:2$

ב. הווקטורים $\overrightarrow{AG}$ **ו-** $\overrightarrow{AF}$ **(שאינם תלויים זה בזה) פורשים את המישור שבו הנקודות** G, A, F **.**

כיוון ש: $\overrightarrow{AK}=\sim\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{AF}$ **הוא קומבינציה ליניארית של ווקטורים אלו, אז גם** $\overrightarrow{AK}$ **נמצא במישור (משפט ד).**

לכן, גם הנקודה K **שייכת למישור זה.**

מכאן שהנקודות G, A, K, F **נמצאות באותו מישור.**

א. נתונים שני מישורים נחתכים: $\text{®}_1: \quad 2x+y-2z=0$ **,** $\text{®}_2: \quad x-2y+2z=0$.

נקודה (x, y, z) **נמצאת על ישר במרחק** 3 **יחידות ממישור** ®_1**, כלומר זה גם מרחק הנקודה מהמישור.**

נציב בנוסחת מרחק נקודה במישור:

$$3=\frac{|2x+y-2z|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} \quad \rightarrow \boxed{9=|2x+y-2z|}$$

הנקודה (x, y, z) **נמצאת על ישר במרחק** 5 **יחידות ממישור** ®_2**, כלומר זה גם מרחק הנקודה מהמישור.**

נציב בנוסחת מרחק נקודה במישור:

$$5=\frac{|x-2y+2z|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2}} \quad \rightarrow \boxed{15=|x-2y+2z|}$$

נבחר במקרה בו הביטוי בערך המוחלט הוא חיובי, ונמצא בהתאם את הישר המבוקש:

(במקרה בו נבחר בביטויים עם ערכים מנוגדים, נקבל משוואה של ישר אחר,

אלא אם כן המישורים היו מאונכים זה לזה – ראה הערה משלימה בסוף סעיף ב)

$$+\begin{cases}9=2x+y-2z\\15=x-2y+2z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 24=3x-y$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y=3t-24}$$

$$\Leftrightarrow 15=t-2(3t-24)+2z$$

$$\Leftrightarrow 15-t+6t+48=2z$$

$$\Leftrightarrow 2z=33+5t$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z=2.5t+16.5}$$

לכן נקודה אופיינית על הישר היא $(t, 3t-24, 2.5t-16.5)$,

וההצגה הפרמטרית של הישר היא: $(0,-24,-16.5)+t(1, 3, 2.5)$

תשובה: ההצגה הפרמטרית של הישר היא: $(0,-24,-16.5)+t(1, 3, 2.5)$

ב. הישר $(0,-24,-16.5)+t(1,3,2.5)$ **חותך את המישור** xz **בנקודה** A , **ואת המישור** yz **בנקודה** B.

במישור yz **:** $x=0$ **לכן שיעורי הנקודה** B **הם** $(0,-24,-16.5)$.

במישור xz **:** $y=0$

נציב $y=0$ **בנקודה האופיינית שעל הישר:**

$$3t-24=0$$

$$\boxed{t=8}$$

$$x=0$$

$$z=2.5\cdot 8-16.5=3.5$$

לכן שיעורי הנקודה A **הם** $(8,0,3.5)$.

אורכי האנכים מנקודות אלו למישור $®_2$ **הם כמרחק הישר ממישור זה, כלומר:** $AD=BC=5$

נמצא את אורך הצלע 32.25 $= AB=\sqrt{(8-0)^2+(0-(-24))^2+3.5-(-16.5)^2}$

שטח מלבן שווה למכפלת האורך ברוחב: $S=AB\cdot AC=32.25\cdot 5=161.245$

תשובה: שטח המלבן ABCD **הוא** 161.245 **יח"ר.**

<u>הערה</u>: **באם היינו מוצאים משוואת ישר אחר, כתוצאה מביטויים עם ערכים מנוגדים בסעיף א,**

התשובה הייתה: שטח המלבן ABCD **הוא** $5\sqrt{65}=40.311$ **יח"ר.**

(1) נתון כי z הוא מספר מרוכב המקיים את המשוואה $z^2-(2\cos\theta)\cdot z+1=0$

נמצא את פתרונות המשוואה באמצעות נוסחת שורשים של משוואה ריבועית:

$$z_{1,2}=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{(2\cos\theta)^2-4}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4(\cos^2\theta-1)}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{-4(1-\cos^2\theta)}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{-4\sin^2\theta}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{2\cos\theta\pm 2i\sin\theta}{2}$$

$$z_{1,2}=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

$$z_1=\cos\theta+i\sin\theta \quad\rightarrow \boxed{z_1=cis\theta}$$

$$z_2=\cos\theta-i\sin\theta \quad\rightarrow=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta) \quad\rightarrow \boxed{z_2=cis(-\theta)}$$

וקבלנו שני פתרונות, המהווים מספרים מרוכבים צמודים.

תשובה: פתרונות המשוואה הם: $z_2=cis(-\theta)$, $z_1=cis\theta$

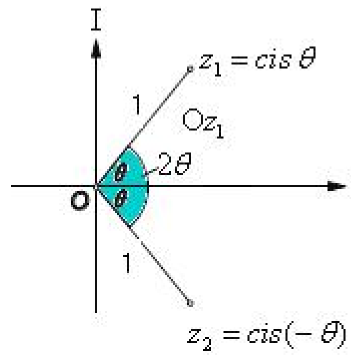
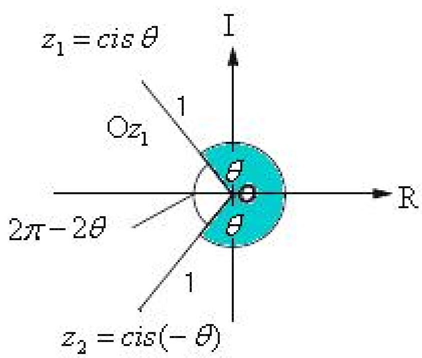
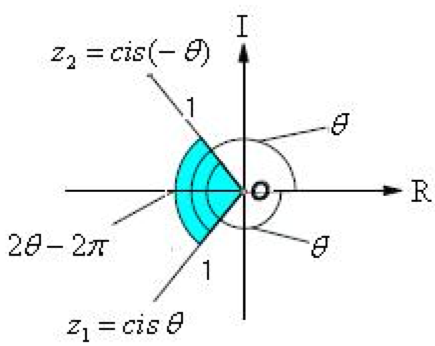
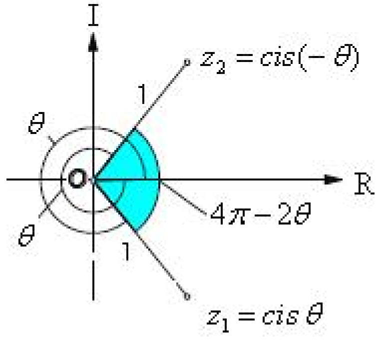
(2) נתון כי θ הוא מספר ממשי – וכך θ היא מספר חיובי, או שלילי, בכל גודל שהוא.

למציאת הזווית בין הקרניים (הווקטורים) Oz_1 ובין Oz_2,

המוגדרת כזווית בין 0 ל- π $(0°-180°)$

יש להוריד תחילה, או להוסיף, כפולות של 2π $(360°)$.

נניח כי $0 \le \theta \le 2\pi$ לצורך הפשטות.

המקרה הפשוט: אם $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ אז ההפרש בין Oz_1 ובין Oz_2 יהיה 2θ	
בשלושת המקרים הבאים נדרש חישוב נוסף, על מנת לקבל זווית בין 0 ל- 2π אם $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ אז ההפרש בין Oz_1 ובין Oz_2 יהיה $2\pi - 2\theta$	
אם $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ אז ההפרש בין Oz_1 ובין Oz_2 יהיה $2\theta - 2\pi$	
אם $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$ אז ההפרש בין Oz_1 ובין Oz_2 יהיה $4\pi - 2\theta$	

ניתן גם להציג בטבלה תוך שימוש בנוח של השארית מהחלוקה (מודולו)

נביא תחילה את ⎾| **להיות בתחום** 0 ≤ ⎾| ≤ 2® **על ידי מציאת השארית של הביטוי (מודולו)** $\frac{⎾|}{2®}$

נציג את הפתרונות האפשריים בטבלה:

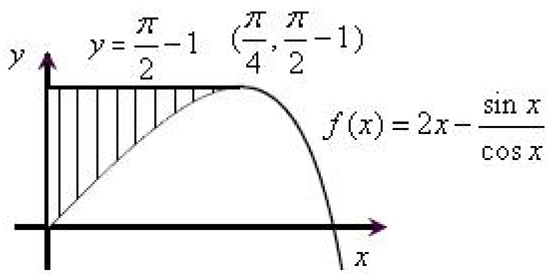
הזווית שבין Oz_1 **ובין** Oz_2	**השארית של התרגיל (מודולו)** $\frac{⎾|}{2®}$
|2¯|	$0 \le \mathrm{mod}(2®) \le \frac{®}{2}$
2® − |2¯|	$\frac{®}{2} \le \mathrm{mod}(2®) \le ®$
|2¯| − 2®	$® \le \mathrm{mod}(2®) \le \frac{3®}{2}$
4® − |2¯|	$\frac{3®}{2} \le \mathrm{mod}(2®) < 2®$

נתונה הפונקציה $f(x)=2x-\frac{\sin x}{\cos x}$ **או** $f(x)=2x-\tan x$ **בתחום** $0\le x\le 2®$ **.**

נמצא את נקודת ההשקה: $f(\frac{®}{4})=2\cdot\frac{®}{4}-\tan\frac{®}{4}=\frac{®}{2}-1$

כלומר שיעורי נקודת השקה/ הקיצון הם: $(\frac{®}{4},\frac{®}{2}-1)$ **,**

ומשוואת המשיק היא של הפונקציה הקבועה $y=\frac{®}{2}-1$



נחשב את האינטגרל על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית של המכנה

$$S=\int_0^{\frac{®}{4}}(\frac{®}{2}-1-(2x-\frac{\sin x}{\cos x}))dx$$

$$S=\int_0^{\frac{®}{4}}(\frac{®}{2}-1-2x-\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x))dx$$

$$S=(\frac{®}{2}x-x-x^2-\ell n\left|\cos x\right|)\Big]_0^{\frac{®}{4}}$$

$$S=(\frac{®}{2}\cdot\frac{®}{4}-\frac{®}{4}-(\frac{®}{4})^2-\ell n\left|\cos\frac{®}{4}\right|)-(\frac{®}{2}\cdot 0-0-(0)^2-\ell n\left|\cos 0\right|)$$

$$S=(\frac{®^2}{8}-\frac{®}{4}--\frac{®^2}{16}-\ell n\frac{\sqrt{2}}{3})-(0-\ell n1)$$

$$S=\boxed{0.178}$$

תשובה: **גודל השטח המבוקש הוא** 0.178 **יח"ר.**

נתונה הפונקציה $f(x)=\ell og_{\frac{1}{2}}x+a\ell og_{\frac{1}{2}}(6-x)$

נעבד את הפונקציה לפני גזירה ולפני מציאת שיעורי נקודת ההשקה.

$$f(x)=\frac{\ell nx}{\ell n\frac{1}{2}}+\frac{a\ell n(6-x)}{\ell n\frac{1}{2}} \quad \leftarrow \log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$f(x)=\frac{\ell nx}{-\ell n2}+\frac{a\ell n(6-x)}{-\ell n2} \quad \leftarrow \ell n\frac{1}{2}=\ell n2^{-1}$$

$$\boxed{f(x)=-\frac{1}{\ell n2}(\ell nx+a\ell n(6-x))}$$

נמצא את שיעורי נקודת ההשקה:

$$f(4)=-\frac{1}{\ell n2}(\ell n4+a\ell n(6-4))$$

$$f(4)=-\frac{1}{\ell n2}(2\ell n2+a\ell n(2)) \quad \leftarrow \ell n4=\ell n2^2$$

$$f(4)=-2-a$$

ושיעורי נקודת ההשקה הם: $(4,-2-a)$

המשיק חותך את ציר ה- x **בנקודה שבה** $x=4+12\ell n2$ **, כלומר בנקודה** $(4+12\ell n2,0)$

ושיפוע המשיק על פי נוסחת השיפוע בין שתי נקודות הוא:

$$m=\frac{-2-a-0}{4-(4+12\ell n2)}$$

$$m=\frac{-2-a}{-12\ell n2}$$

$$\boxed{m=\frac{2+a}{12\ell n2}}$$

נמצא את שיפוע המשיק באמצעות ערך הנגזרת בנקודת ההשקה:

$$f(x)=-\frac{1}{\ell n2}(\ell nx+a\ell n(6-x))$$

$$f'(x)=-\frac{1}{\ell n2}(\frac{1}{x}-\frac{a}{6-x})$$

$$m=-\frac{1}{\ell n2}(\frac{1}{4}-\frac{a}{6-4})$$

$$\boxed{m=-\frac{1}{\ell n2}(\frac{1}{4}-\frac{a}{2})}$$

נמצא את ערך הפרמטר a :

$$\frac{2+a}{12\ell n2}=-\frac{1}{\ell n2}(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}) \quad /\cdot\ell n2$$

$$\frac{2+a}{12}=-(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}) \quad /\cdot12$$

$$2+a=-3+6a$$

$$5a=5$$

$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$

יש לפתור את האי-שוויון:

$$x^{(\log_2 x+\log_{\frac{1}{4}} 4)} < 4$$

תחום הגדרה:

$$\boxed{x > 0}$$

הפונקציה $\log_2 x$ היא פונקציה עולה – לכן אי השוויון *לא* ישנה כיוון

$$\log_2 x^{(\log_2 x+\log_{\frac{1}{4}} x)} < \log_2 4$$

$$(\log_2 x+\log_{\frac{1}{4}} 4)\log_2 x < \log_2 4 \quad \leftarrow \log_a x^n = n\log_a x$$

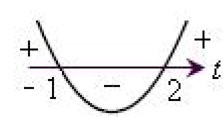
$$(\log_2 x+\log_{\frac{1}{4}} 4)\log_2 x < \log_2 4 \quad \leftarrow \log_{\frac{1}{4}} 4 = -1,\ \log_2 4 = 2$$

$$(t-1)t < 2 \quad \leftarrow \boxed{\log_2 x = t}$$

$$t^2 - t - 20 < 0$$

$$(t-2)(t+1) < 0$$

נצייר את הפרבולה המתאימה:



ולכן: $-1 < t < 2$

ובהתאם: $-1 < \log_2 x < 2$

הפונקציה $\log_2 x$ היא פונקציה עולה – לכן אי השוויון *לא* ישנה כיוון

$$-1 < \log_2 x < 2$$

קל לראות שהתחום המשותף עם תחום ההגדרה

$$2^{-1} < x < 2^2$$

הוא: $\boxed{\frac{1}{2} < x < 4}$

תשובה: $\frac{1}{2} < x < 4$