א. נשתמש פעמיים במשפט הסינוסים

$\underline{\Delta ABD}$

$$\frac{BD}{\sin a}=\frac{AB}{\sin \angle D_1}$$

$\underline{\Delta ACD}$

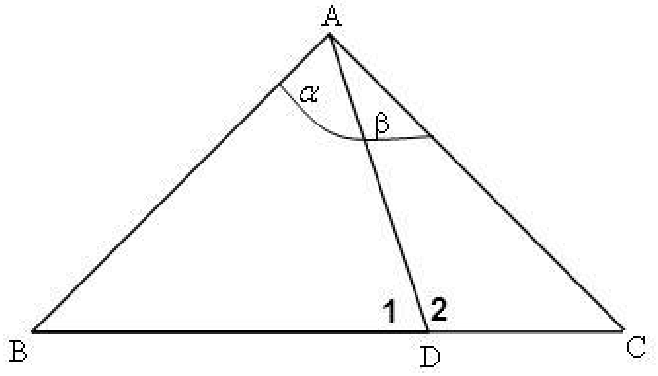
$$\frac{DC}{\sin b}=\frac{AC}{\sin \angle D_2}$$

$$\frac{\frac{BD}{\sin a}}{\frac{DC}{\sin b}}=\frac{\frac{AB}{\sin \angle D_1}}{\frac{AC}{\sin \angle D_2}}$$

$$\frac{BD\sin b}{DC\sin a}=1 \quad \leftarrow \sin x=\sin(180°-x), AB=AC$$

$$\boxed{\frac{BD}{DC}=\frac{\sin a}{\sin b}}$$

הוּכַח



<u>דרך חלופית לפתרון</u>

$\underline{\Delta ABD}$

$$\frac{BD}{\sin\alpha}=\frac{AD}{\sin\angle B}$$

$\underline{\Delta ACD}$

$$\frac{DC}{\sin\beta}=\frac{AD}{\sin\angle C}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\frac{BD}{\sin\alpha}}{\frac{DC}{\sin\beta}}=\frac{\frac{AD}{\sin\angle B}}{\frac{AD}{\sin\angle C}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{BD\sin\beta}{DC\sin\alpha}=1 \quad (\angle B=\angle C\leftarrow AB=AC)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{BD}{DC}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}$$

ב. נתון $\angle ABC=45°$ **, כלומר גם** $\angle ACB=45°$ **והמשולש ישר זווית**

לכן $a+b=90 \quad \rightarrow \sin b=\cos a$

נציב $\frac{BD}{DC}=2$ **במשוואה שהוכחנו את נכונותה בסעיף א.**

$$\frac{\sin a}{\sin b}=2$$

$$\frac{\sin a}{\cos a}=2$$

$$\tan a=2$$

$$\boxed{a=63.43°} \quad 0<a<90°$$

תשובה: $a=63.43°$.

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x+a\sin x$ **בתחום** $0\le x\le p$ **,** $a>0$ **.**

(1) $f'(x)=1+a\cos x$ **, כאשר** $f'(x)=1$ **בהתאם לשיפוע המשיק הנתון.**

$$1=1+a\cos x$$
$$a\cos x=0 \quad \to \cos x=0$$
$$x=\frac{p}{2}+pk$$

ועבור $k=0$ **נקבל** $x=\frac{p}{2} \quad \to f(x)=\frac{p}{2}+a\cdot sin\frac{p}{2}=\frac{p}{2}+a$

תשובה: שיעורי נקודת ההשקה הם $(\frac{p}{2},\frac{p}{2}+a)$

(2) נמצא את משוואת המשיק

$$y-(\frac{p}{2}+a)=1(x-\frac{p}{2})$$
$$y=x-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}+a$$
$$\boxed{y=x+a}$$

תשובה: $y=x+a$

ב. (1) נתון כי שטח המשולש ברביע השני הוא 2**,**

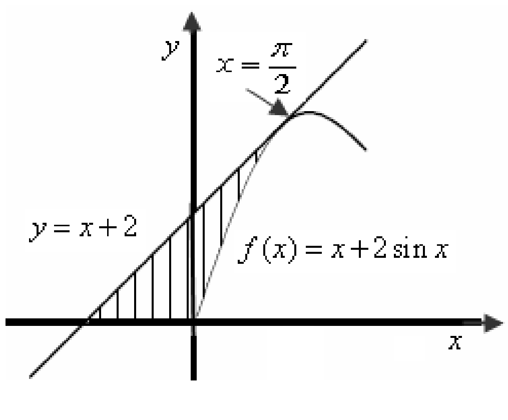
כאשר שיעורי נקודת החיתוך של הישר עם הצירים הם: $(0,a),(-a,0)$

$$2=\frac{a\cdot a}{2} \quad \to 4=a^2 \quad \to a=2 \quad \leftarrow a>0$$

תשובה: $a=2$

(2) נחשב את השטח המבוקש, שחלקו שברביע השני שווה ל- 2

משוואת הישר $y=x+2$ **והפונקציה** $f(x)=x+2\sin x$



$$S_1=\int_0^{\frac{p}{2}}(x+2-(x+2\sin x))dx$$
$$S_1=\int_1^{\frac{p}{2}}(2-2\sin x)dx$$
$$S_1=2x+2\cos x\Big]_0^{\frac{p}{2}}$$
$$S_1=(2\cdot\frac{p}{2}+2\cos\frac{p}{2})-(2\cdot 0+2\cos 0)$$
$$S_1=p-2$$
$$S=p-2+2=p$$

תשובה: גודל השטח המקווקו p יח"ר.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3x+3}{x-2}$ **.**

(1) מעלת פולינום מונה (1) **שווה למעלת פולינום מכנה** (1)**, ולכן** $y=\frac{3}{1}=3$ **אסימפטוטה אופקית**

תחום ההגדרה $x\neq 2$**, כאשר** $x=2$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן הישר** $x=2$ **אסימפטוטה אנכית**

תשובה: $y=3$ **,** $x=2$

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$**, לכן** $f(0)=\frac{3\cdot 0+3}{0-2}=-1.5 \quad \to (0,-1.5)$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$**, לכן** $0=\frac{3x+3}{x-2} \quad \to 0=3x+3 \quad \to -3x=3 \quad \to (-1,0)$

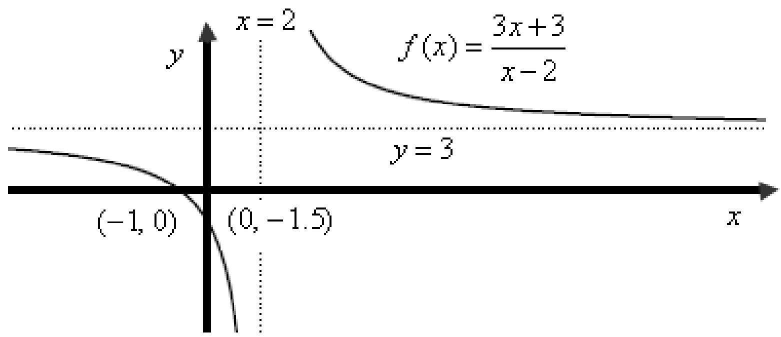
תשובה: $(0,-1.5)$ **,** $(-1,0)$

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה

$f'(x)=\frac{3(x-2)-(3x+3)}{(x-2)^2}=\frac{3x-6-3x-3}{(x-2)^2} \quad \to \boxed{f'(x)=\frac{-9}{(x-2)^2}}$ **, נגזרת שלילית, לכל** $x\neq 2$

תשובה: הפונקציה יורדת עבור $x>2$**, או** $x<2$

(4) סקיצה של גרף הפונקציה



ב. נמצא את שיפוע המשיק בנקודת החיתוך עם ציר ה- y**:** $f'(0)=\frac{-9}{(0-2)^2}=-2.25$

$$-2.25=\frac{-9}{(x-2)^2} \quad \to (x-2)^2=4$$

$$x-2=2 \quad or \quad x-2=-2$$

$$\boxed{x=4} \quad or \quad x=0$$

תשובה: $x=4$

ג. הפונקציה $g(x)=f(x)+C$ **היא הזזה אנכית של** $f(x)$ **.**

כיוון שהאסימפטוטה האופקית של $f(x)$ **היא** $y=3$ **ושל** $g(x)$ **היא** $y=4.5$ **,**

הרי שההזזה היא 1.5 **יח' כלפי מעלה**

תשובה: $C = 1.5$

א. נגזור את הפונקציה $y = x\ln x$

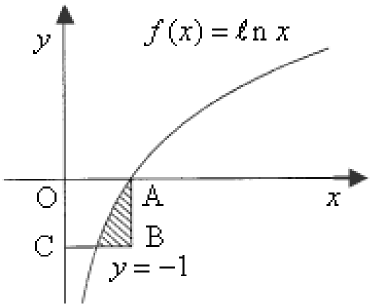
$$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \quad \leftarrow (uv)' = u'v + uv'$$

$$\boxed{y' = \ln x + 1}$$

תשובה: $y' = \ln x + 1$

ב. (1) נמצא את שיעורי הקדקוד A **, שבו מתקיים** $y = 0$ **(תחום ההגדרה של הפונקציה** $x > 0$ **)**

$$0 = x\ln x$$
$$\ln x = 0$$
$$x = e^0$$
$$x = 1 \quad \rightarrow \mathrm{A}(1,0)$$



ובהתאם, כיוון ש- OABC **הוא ריבוע,** $\mathrm{B}(1,-1)$, $\mathrm{C}(0,-1)$

ומשוואת הצלע BC **היא** $y = -1$.

תשובה: $y = -1$

(2) נמצא את הגבול השמאלי של השטח המבוקש

$$\ln x = -1$$
$$x = e^{-1} \quad \rightarrow x = \frac{1}{e}$$

פונקציה עליונה	$y = \ln x$
פונקציה תחתונה	$y = -1$
x **גדול**	$x = 1$
x **קטן**	$x = \frac{1}{e}$

ניעזר בסעיף א', ממנו ניתן ללמוד כי

$$\int (\ln x + 1)\, dx = x\ln x + C$$

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (\ln x - (-1))dx$$

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (\ln x + 1)dx$$

$$S = x\ln x \Big]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$S = 1\ln 1 - \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}$$

$$S = 0 - \frac{1}{e}(-1)$$

$$\boxed{S = \frac{1}{e}}$$

תשובה: גודל השטח המקווקו הוא $\frac{1}{e}$.

הפונקציה שיש להביא ל*מקסימום* היא שטח הטרפז ABCD

כלומר: $s=\frac{(\mathrm{AB}+\mathrm{CD})\mathrm{h}}{2}$

הנקודה A **נמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ **ולכן נסמנה** $\mathrm{A}(t,e^{-\frac{1}{2}t^2})$ **.**

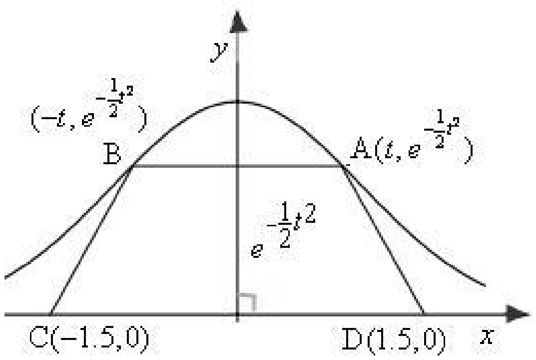
כיוון שהקטע AB **מקביל לציר ה-** x **, הרי ש-** $y_{\mathrm{B}}=y_{\mathrm{A}}=e^{-\frac{1}{2}t^2}$

ולכן $e^{-\frac{1}{2}x^2}=e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad \to 0.5x^2=0.5t^2 \quad \to x_{\mathrm{B}}=-t \quad \to \mathrm{AB}=2t$

(<u>הערה</u> – העובדה ששיעורי ה- x **של הנקודות** A **ו-** B **נגדיים עבור ערכי** y **שווים, נובעת מזוגיות הפונקציה)**

כמו כן, על פי שיעורי הנקודות $\mathrm{D}(1.5,0)$ **ו-** $\mathrm{C}(-1.5,0)$ **נקבל ש-** $\mathrm{CD}=3$

גובה הטרפז, שווה לשיעור ה- y **של הנקודות** A **ו-** B**, כי הקטע** AB **מקביל לקטע** CD **המונח על ציר ה-** x **.**



$$\boxed{S(t)=0.5e^{-\frac{1}{2}t^2}(3+2t)}$$

$$S'(t)=0.5(-t(3+2t)e^{-\frac{1}{2}t^2}+2e^{-\frac{1}{2}t^2})$$

$$\boxed{S'(t)=0.5e^{-\frac{1}{2}t^2}(-3t-2t^2+2)}$$

$$0=-2t^2-3t+2$$

$$t_{1,2}=\frac{3\pm5}{-4} \quad t=\cancel{-2},\ t=0.5 \quad \leftarrow x_{\mathrm{A}}>0$$

$$\left.\begin{array}{l} S'(0.4)=0.5e^{-\frac{1}{2}0.4^2}(-3\cdot0.4-2\cdot0.4^2+2)=+\cdot0.48>0 \\ S'(0.6)=0.5e^{-\frac{1}{2}0.6^2}(-3\cdot0.6-2\cdot0.6^2+2)=+\cdot(-0.52)<0 \end{array}\right\} x=0.5,\max$$

תשובה: $x=0.5$ **, עבורו שטח המרובע** ABCD **הוא מקסימלי.**